資本資産価格モデル
経営財務 I

山嵜　輝

東京大学 経済学部 講義資料

内容

1. 証券市場の均衡
2. 資本資産価格モデル
3. 証券市場線と証券評価

証券市場の均衡

仮定

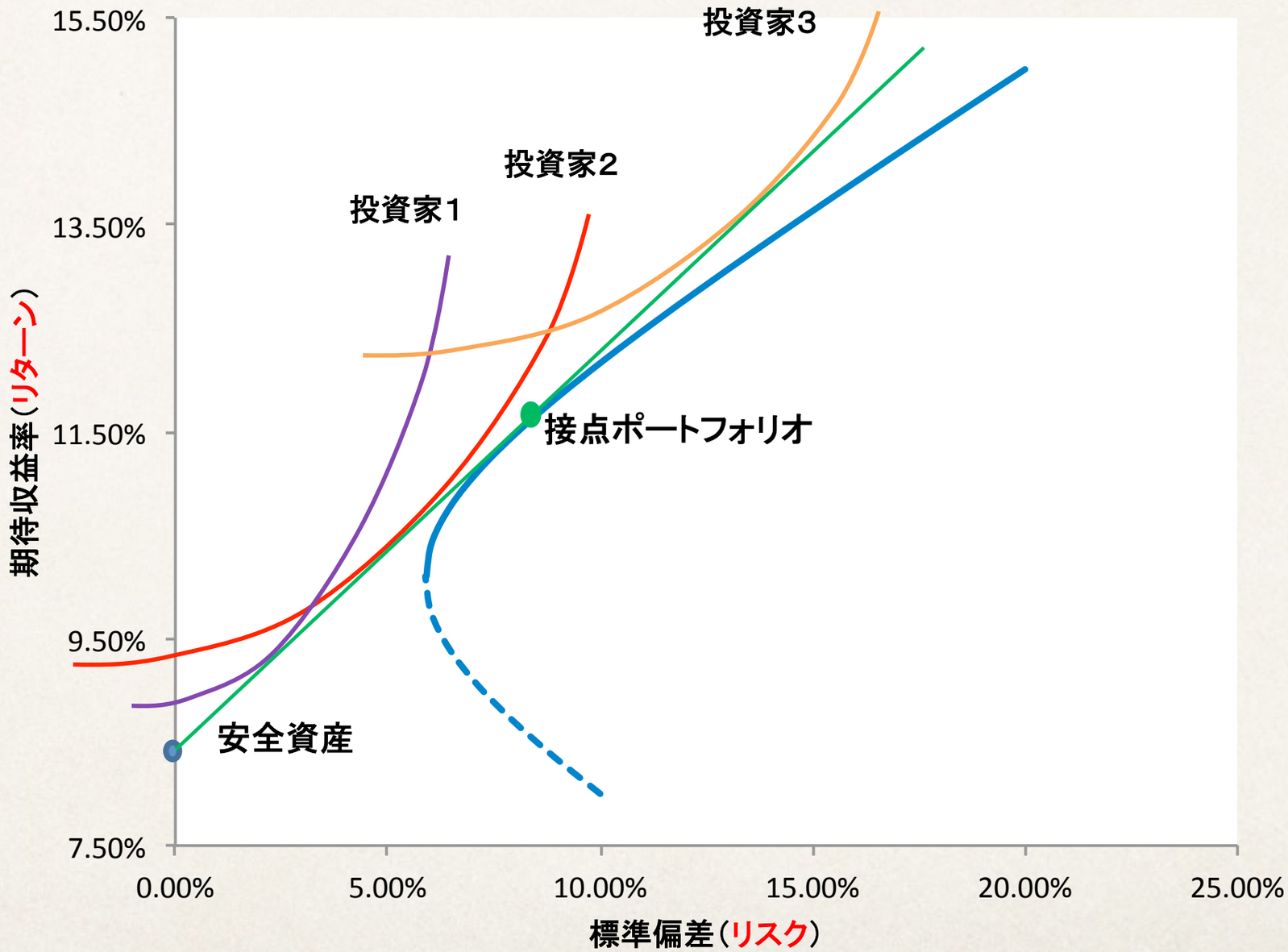
以降では次の仮定を置く

- 市場には1つの安全資産と複数のリスク資産が供給
- 複数の投資家が存在し、同じ投資機会集合を予想
- 各投資家は異なる効用関数を持つがリスク回避的

各投資家は次の合理的投資行動をとる（Tobinの分離定理）

- リスク資産のポートフォリオとして接点ポートフォリオを保有
- 効用関数に応じて安全資産と接点ポートフォリオの投資比率を決定

各投資家の合理的投資行動



市場ポートフォリオ

市場ポートフォリオ：

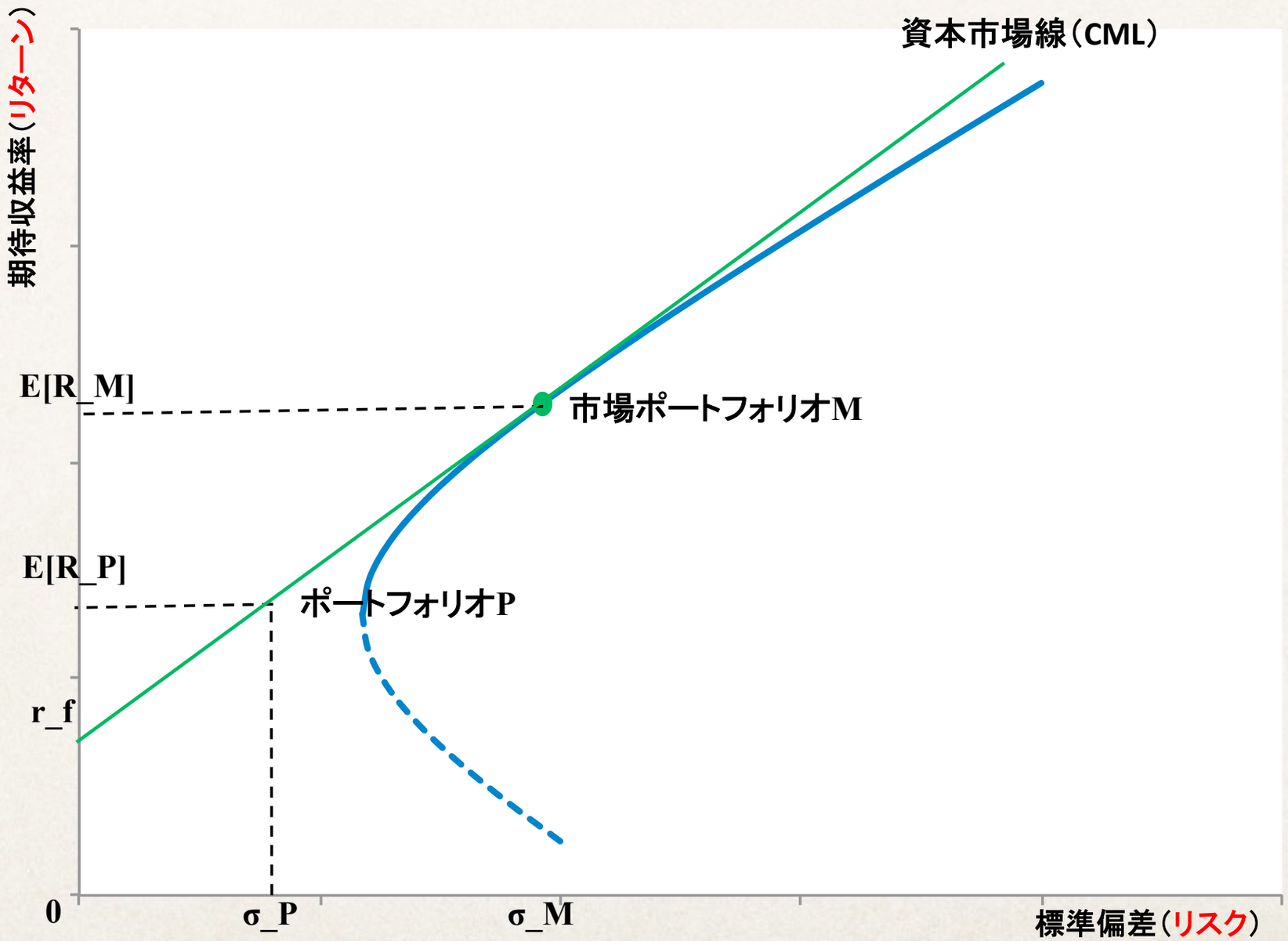
- すべての投資家は接点ポートフォリオを保有

➡️ 接点ポートフォリオの合計とリスク資産の時価総額が一致

- 市場ポートフォリオ（Market Portfolio）とは、すべてのリスク資産からなるポートフォリオ
- 市場ポートフォリオと接点ポートフォリオのリスク資産の組み入れ比率は同じ（➡リターンとリスクが同じ）

➡️ TOPIXなどのインデックス運用の理論的根拠

資本市場線 （Capital Market Line）



リスクの市場価格

- CMLの傾きをリスクの市場価格（Market Price of Risk）という

リスクの市場価格：
$$\frac{\mathbb{E}[R_M] - r_f}{\sigma_M}$$

- CML上の任意のポートフォリオPに対して次式が成り立つ

$$\frac{\mathbb{E}[R_P] - r_f}{\sigma_P} = \frac{\mathbb{E}[R_M] - r_f}{\sigma_M} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[R_P] = r_f + \frac{\sigma_P}{\sigma_M}(\mathbb{E}[R_M] - r_f)$$

- リスクの市場価格はシャープ比（Sharpe Ratio）の上限

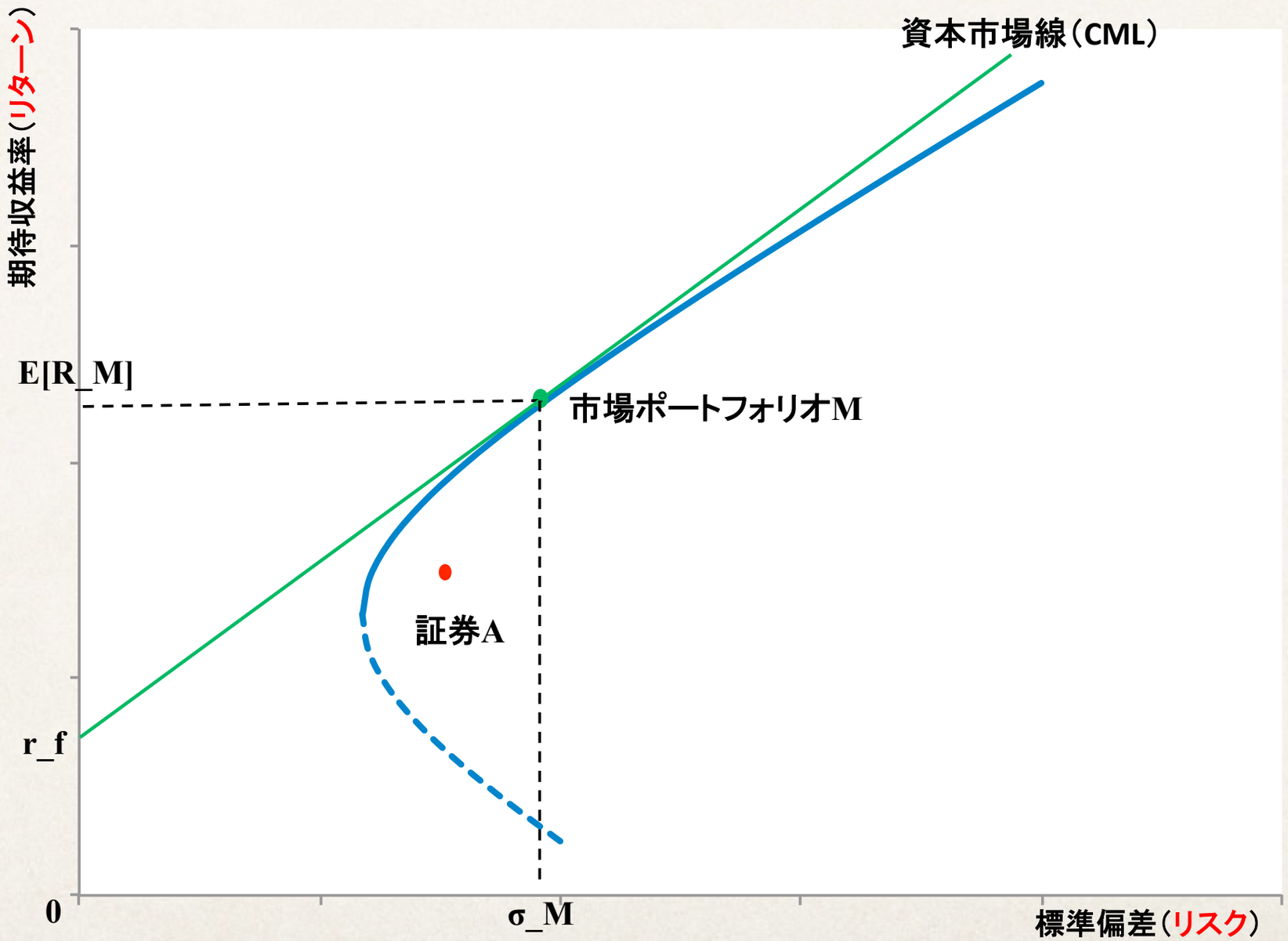
例題

例題：下表の安全資産と市場ポートフォリオを組み合わせたポートフォリオのリターンとリスクを求め、このポートフォリオのシャープ比がリスクの市場価格に等しいことを確認せよ。

	期待収益率（リターン）	標準偏差（リスク）	投資比率（$w_A+w_B=1$）
安全資産	5%	0%	0.5
市場ポートフォリオ	8%	10%	0.5

資本資産価格モデル

個別証券のリスクとリターン



個別証券の均衡リターン

資本資産価格モデル（Capital Asset Pricing Model; CAPM）：

証券市場の均衡状態では、任意の証券Aの期待収益率（均衡リターン）は次式で与えられる

$$\mathbb{E}[R_A] = r_f + \beta_A(\mathbb{E}[R_M] - r_f)$$

ただし、

$$\beta_A := \frac{\sigma_{AM}}{\sigma_M^2} = \frac{\mathbf{Cov}[R_A, R_M]}{\mathbf{Var}[R_M]}$$

CAPMの証明

個別証券 A の均衡リターンが CAPM で与えられることを示す

市場ポートフォリオ M と証券 A で構成されるポートフォリオ P を考える
証券 A の投資比率を w、市場ポートフォリオの投資比率を $1-w$ とすると、ポートフォリオ P のリターンとリスクは次式となる

$$\mathbb{E}[R_P] = w\mathbb{E}[R_A] + (1-w)\mathbb{E}[R_M]$$

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_M^2 + 2w(1-w)\sigma_{AM} \\ &= (\sigma_A^2 + \sigma_M^2 - 2\sigma_{AM})w^2 + 2(\sigma_{AM} - \sigma_M^2)w + \sigma_M^2\end{aligned}$$

このとき、ポートフォリオ P の接線の傾きは次式となる

$$\frac{d\mathbb{E}[R_P]}{d\sigma_P} = \frac{\frac{d\mathbb{E}[R_P]}{dw}}{\frac{d\sigma_P^2}{dw}} \times \frac{d\sigma_P^2}{d\sigma_P} = \frac{\mathbb{E}[R_A] - \mathbb{E}[R_M]}{2(\sigma_A^2 + \sigma_M^2 - 2\sigma_{AM})w + 2(\sigma_{AM} - \sigma_M^2)} \times 2\sigma_P \tag{1}$$

$w=0$ とすると、ポートフォリオ P は市場ポートフォリオ M に一致するので、(1) 式は

$$\frac{d\mathbb{E}[R_P]}{d\sigma_P} = \frac{\mathbb{E}[R_A] - \mathbb{E}[R_M]}{\sigma_{AM} - \sigma_M^2} \times \sigma_M \qquad (\sigma_P = \sigma_M \text{ より}) \tag{2}$$

一方、$w=0$ のポートフォリオ P、すなわち市場ポートフォリオの傾きはリスクの市場価格

$$\frac{d\mathbb{E}[R_P]}{d\sigma_P} = \frac{\mathbb{E}[R_M] - r_f}{\sigma_M} \tag{3}$$

したがって、「(2) の右辺 = (3) の右辺」より、CAPM を得る

価格公式とCAPM

資産価格公式1：

配当のない任意の証券Aの価格 P_0 は. . .

$$\frac{\mathbb{E}[P_1] - P_0}{P_0} = \mathbb{E}[R_A] = r_f + \beta_A(\mathbb{E}[R_M] - r_f)$$

より、

$$P_0 = \frac{\mathbb{E}[P_1]}{1 + r_f + \beta_A(\mathbb{E}[R_M] - r_f)}$$

確実同値価格公式

資産価格公式2：

配当のない任意の証券Aの価格 P_0 は次式となる

$$P_0 = \frac{1}{1+r_f}\left\{\mathbb{E}[P_1] - \frac{\mathbf{Cov}[P_1, R_M]}{\mathbf{Var}[R_M]}(\mathbb{E}[R_M] - r_f)\right\}$$

証明

$R_A = P_1/P_0 - 1$ なので、証券 A のベータは

$$\beta_A = \frac{\mathbf{Cov}[(P_1/P_0 - 1), R_M]}{\mathbf{Var}[R_M]} = \frac{\mathbf{Cov}[P_1, R_M]}{P_0\mathbf{Var}[R_M]}$$

これを前頁の資産価格公式 1 に代入して両辺を P_0 で割ると

$$1 = \frac{\mathbb{E}[P_1]}{P_0(1+r_f) + \frac{\mathbf{Cov}[P_1, R_M]}{\mathbf{Var}[R_M]}(\mathbb{E}[R_M] - r_f)}$$

上式を P_0 に関して解くと資産価格公式 2 が得られる

証券市場線と証券評価

証券市場線（Security Market Line）

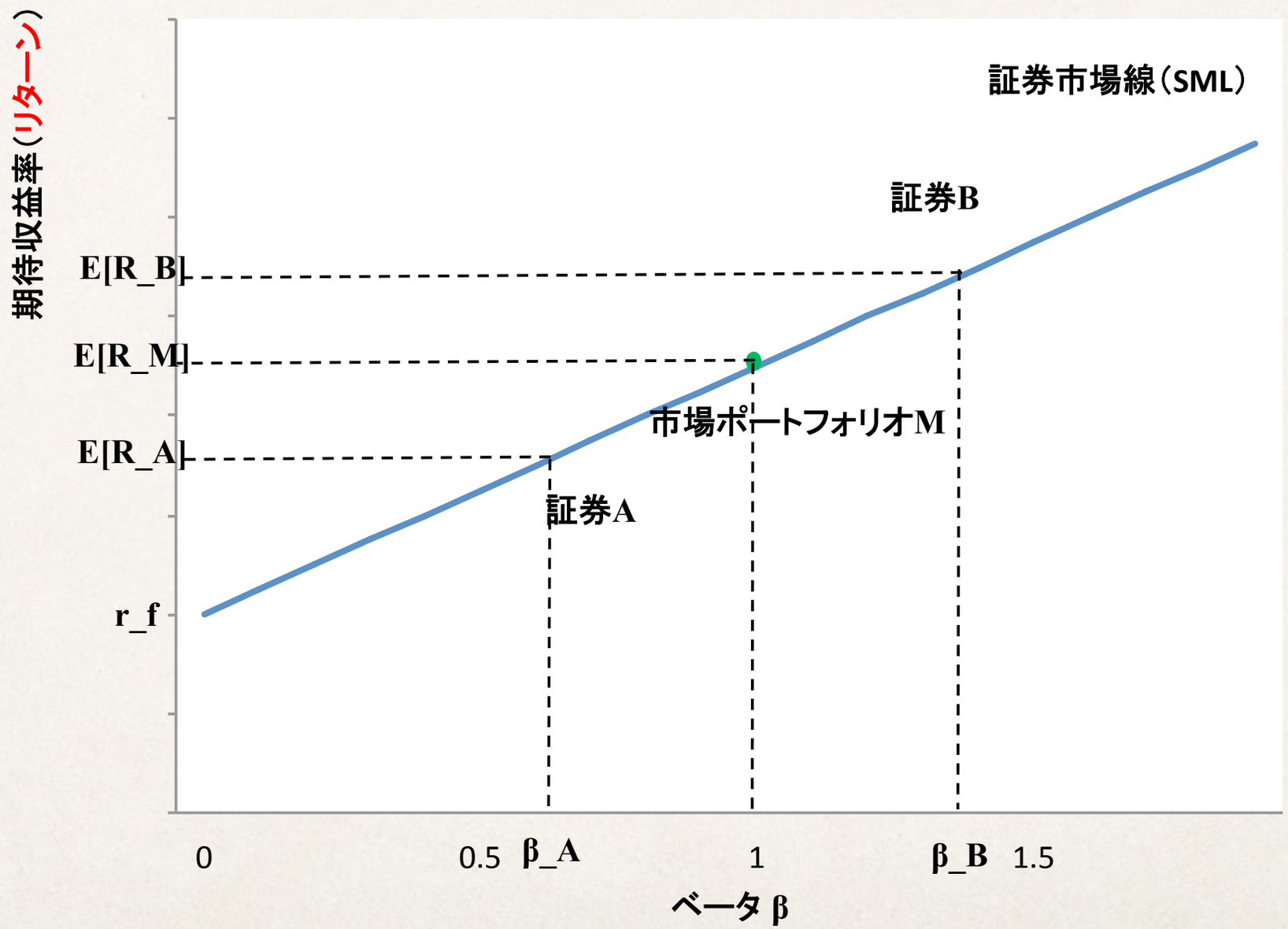
証券市場線（Security Market Line; SML）：

証券市場の均衡状態では、すべて証券の期待収益率（均衡リターン）はベータと次の直線の関係で与えられる

$$\mathbb{E}[R_x] = r_f + \beta_x(\mathbb{E}[R_M] - r_f)$$

- 任意の証券の均衡リターンはベータを与えれば決まる
- すべての証券の均衡リターンはSML上にある

証券市場線と均衡リターン

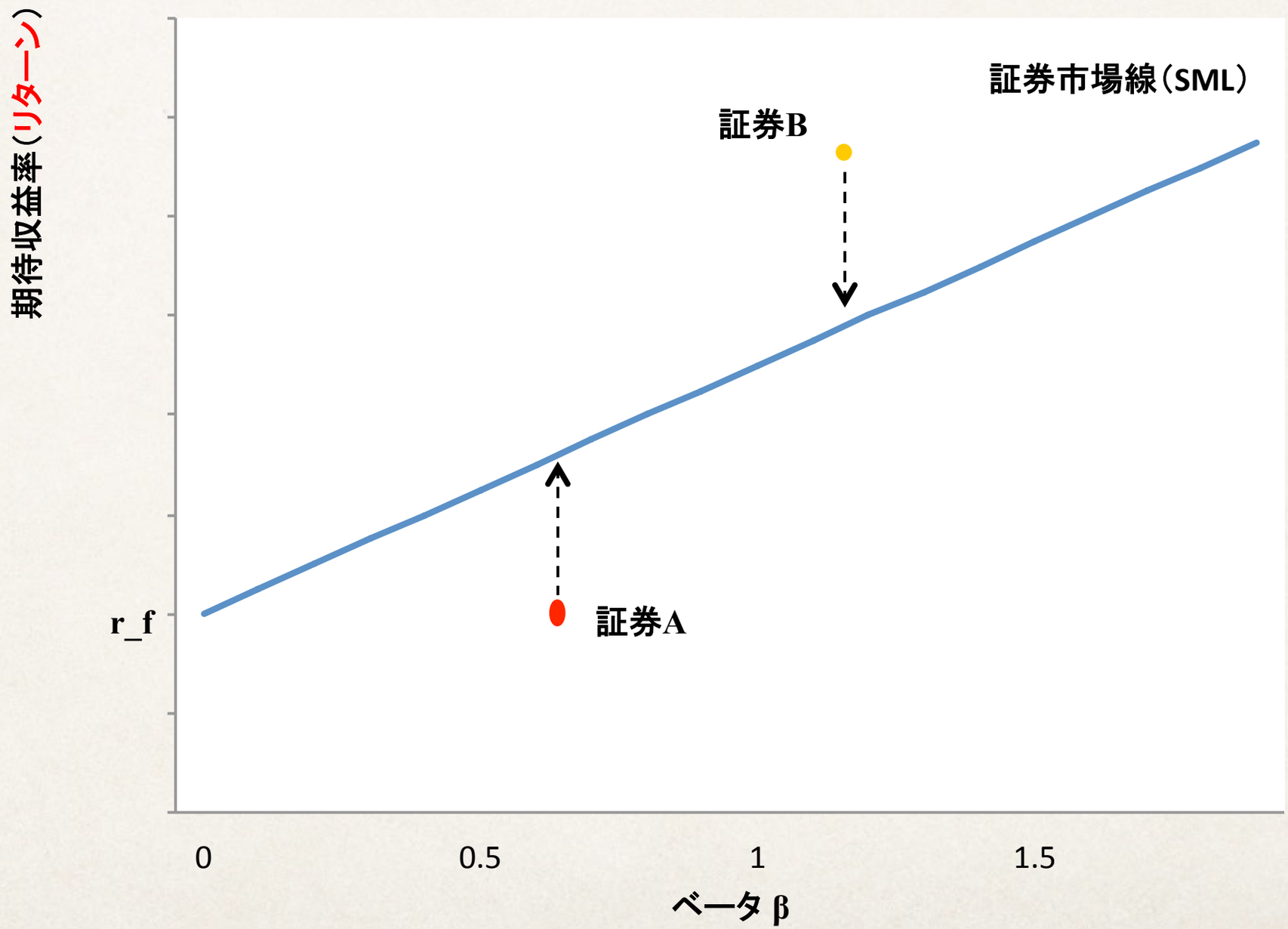


例題

例題：下表の状況のとき、証券Aの均衡リターンを求めよ。

	期待収益率（リターン）	標準偏差（リスク）	相関係数
証券A	？%	8%	+0.7
市場ポートフォリオ	8%	10%	
安全資産	5%	0%	

個別証券の評価



Jensenのアルファ

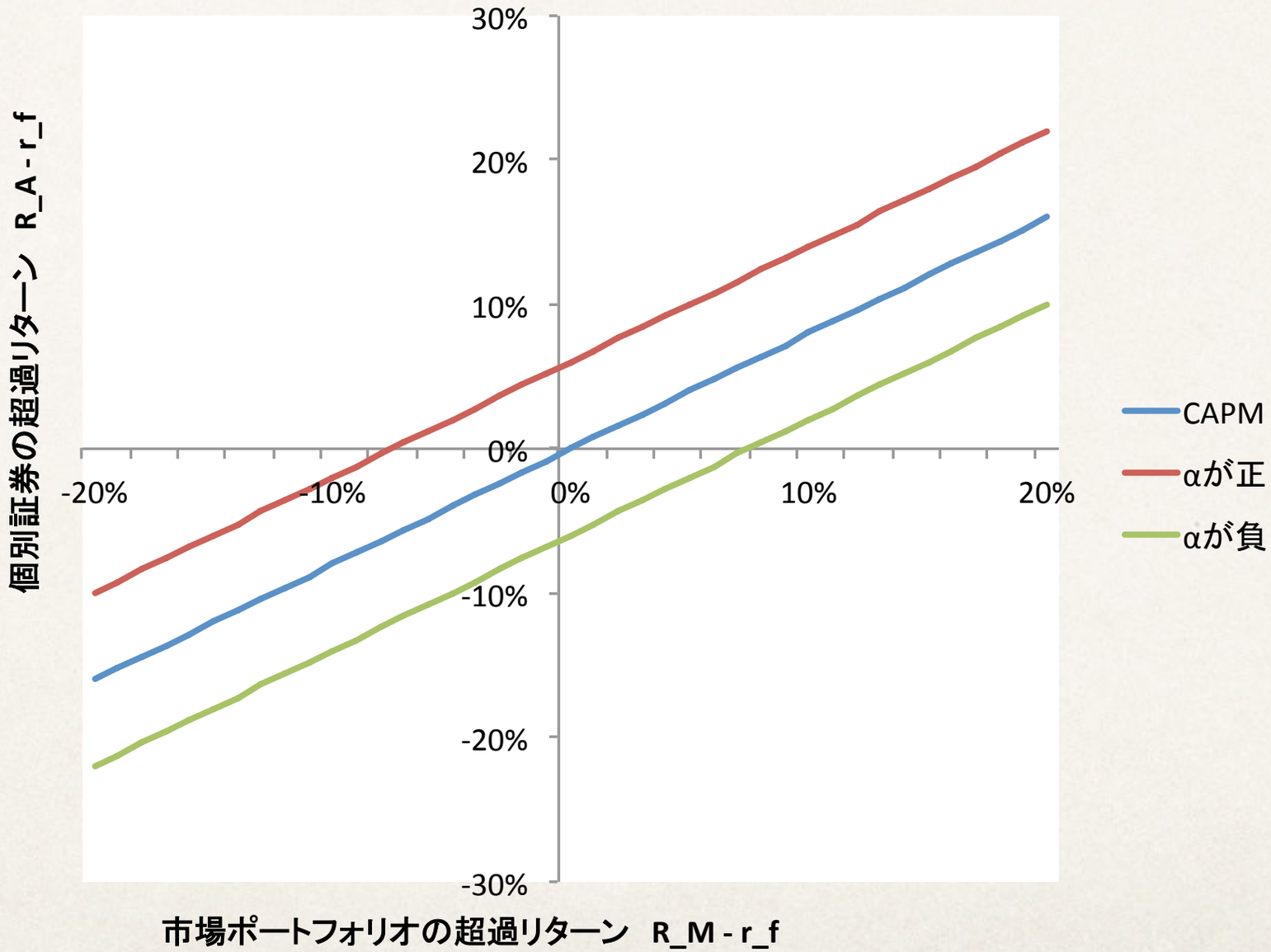
Jensenのアルファ（Jensen's Alpha）：

任意の証券Aの期待収益率に対して、次を満たす定数 α_{A} を（証券Aの）Jensenのアルファという

$$\mathbb{E}[R_A] = r_f + \beta_A(\mathbb{E}[R_M] - r_f) + \alpha_A$$

- $\alpha_{\mathrm{A}} > 0$（< 0）のとき、証券Aは過小評価／割安（過大評価／割高）
- CAPMが成立するとき、$\alpha_{\mathrm{A}} = 0$

回帰分析


30%
20%
10%
0%
-10%
-20%
-30%
-20%
-10%
0%
10%
20%
個別証券の超過リターン R_A - r_f
市場ポートフォリオの超過リターン R_M - r_f
CAPM
αが正
αが負

マーケットモデル

マーケットモデル（Market Model）：

証券Aの収益率を説明変数、市場ポートフォリオの収益率を被説明変数とする単回帰モデルをマーケットモデルという

$$R_A = r_f + \beta_A(R_M - r_f) + \alpha_A + e_A$$

- e_A は誤差項（他と独立な確率変数、期待値 0、標準偏差 $\sigma_{e_A} \geqq 0$）
- システマティックリターン： $r_f + \beta_A(R_M - r_f)$
- 非システマティックリターン： $\alpha_A + e_A$

証券の分散と共分散

証券Aの分散（総リスク）：

$$\sigma_A^2 = \beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e_A}^2$$

- システマティックリスク： $\beta_A^2 \sigma_M^2$
- 非システマティックリスク： $\sigma_{e_A}^2$

証券Aと証券Bの共分散：

$$\sigma_{AB} := \mathbf{Cov}[R_A, R_B] = \beta_A \beta_B \sigma_M^2$$

証明

（証券 A の分散の証明）

$$
\begin{aligned}
\sigma_A^2 &= \mathbf{Var}[R_A] = \mathbf{Var}[\beta_A(R_M - r_f) + \alpha_A + e_A] \\
&= \mathbf{Var}[\beta_A R_M + e_A] \\
&= \beta_A^2 \mathbf{Var}[R_M] + \mathbf{Var}[e_A] + 2\beta_A \mathbf{Cov}[R_M, e_A] \\
&= \beta_A^2 \mathbf{Var}[R_M] + \mathbf{Var}[e_A] \\
&= \beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e_A}^2
\end{aligned}
$$

（証券 A と B の共分散の証明）

$$
\begin{aligned}
\sigma_{AB} &= \mathbf{Cov}[R_A, R_B] = \mathbf{Cov}[\beta_A R_M + e_A, \beta_B R_M + e_B] \\
&= \beta_A \beta_B \mathbf{Cov}[R_M, R_M] + \beta_A \mathbf{Cov}[R_M, e_B] + \beta_B \mathbf{Cov}[e_A, R_M] + \mathbf{Cov}[e_A, e_B] \\
&= \beta_A \beta_B \mathbf{Var}[R_M] = \beta_A \beta_B \sigma_M^2
\end{aligned}
$$