平均・分散アプローチ
経営財務 I

山嵜　輝

東京大学 経済学部 講義資料

内容

1. 現代ポートフォリオ理論とは？
2. 投資家の効用と証券投資
3. 投資機会集合
4. 最適ポートフォリオ

現代ポートフォリオ理論とは？

問題と目的

問題：投資家が以下の証券による1年間の資産運用を考える

- 安全資産：1年後の損益は確定的（一物一価の法則より、ただ1つ）
- リスク資産：1年後の損益は確率的（複数）

資産運用の世界では、リスクとリターンはトレードオフ

目的：証券の上手な組み合わせによって、

- 同じ期待収益率であればリスクの最も小さいポートフォリオを実現
- 同じリスクであれば期待収益率が最も大きいポートフォリオを実現

効率的市場仮説

E. Fama(1970)の効率的市場仮説：

- Weak Form：

  資産価格は過去に公開された情報をすべて反映している

- Semi-Strong Form：

  資産価格は新たに公開される情報も瞬時に反映される

- Strong Form：

  資産価格はインサイダー情報さえも反映される

ポートフォリオ理論の功績

H. Markowitz(1952)の平均・分散アプローチ：

- 証券およびポートフォリオの収益率の標準偏差をリスクと定義
- 1人の投資家の期待効用最大化を仮定

➡️ リスク資産の最適なポートフォリオは効率的フロンティア上にある

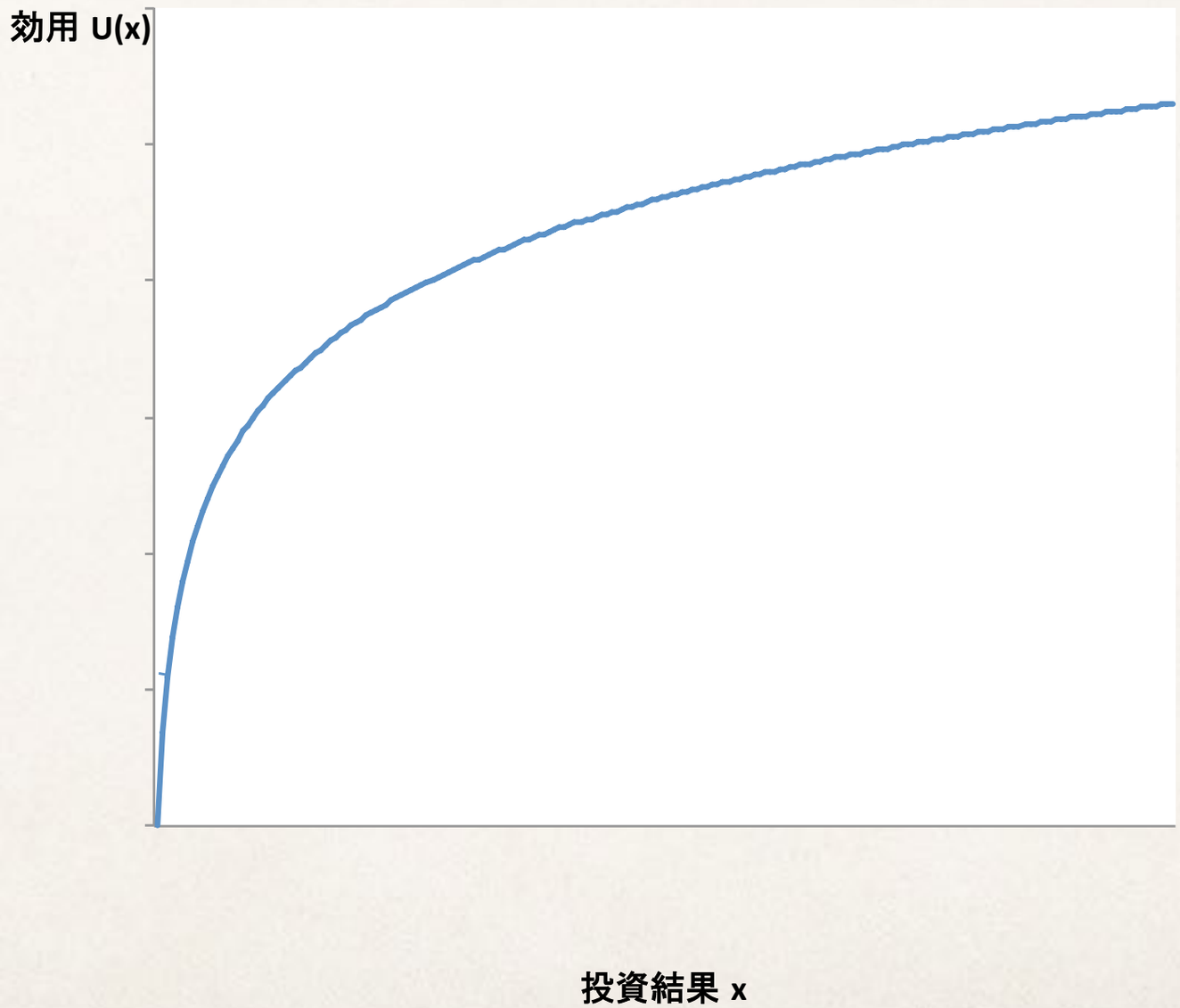
W. Sharpe(1964)の資本資産価格モデル：

- すべての投資家の期待効用最大化を仮定 ➡️ 金融市場の均衡

➡️ すべての株式期待収益率（株主資本コスト）は証券市場線上にある

投資家の効用と証券投資

効用関数



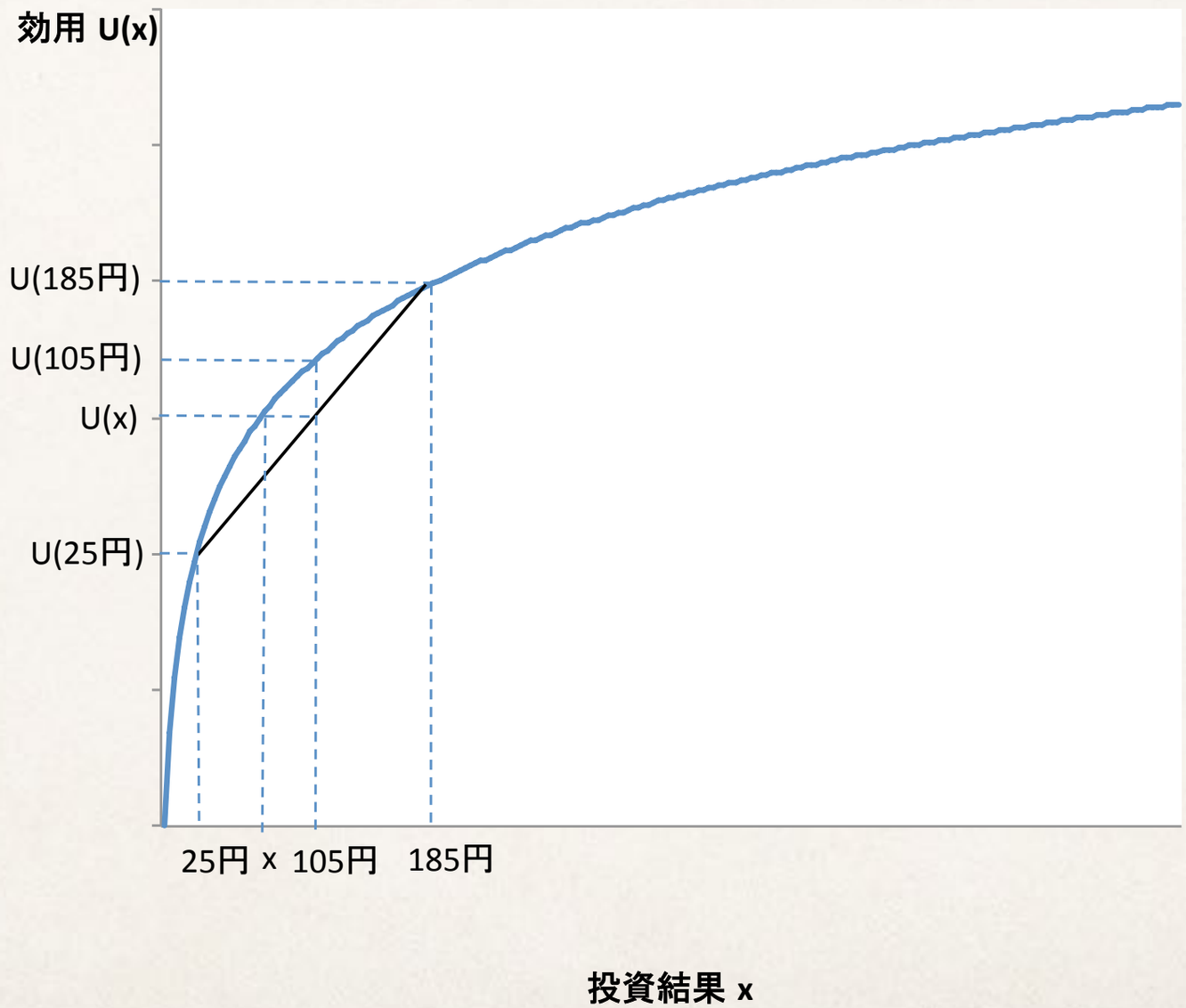
安全資産とリスク資産

	現時点	1年後	
		好況（1/2）	不況（1/2）
安全資産	100円	105円	105円
証券A	100円	185円	25円
証券B	100円	195円	15円

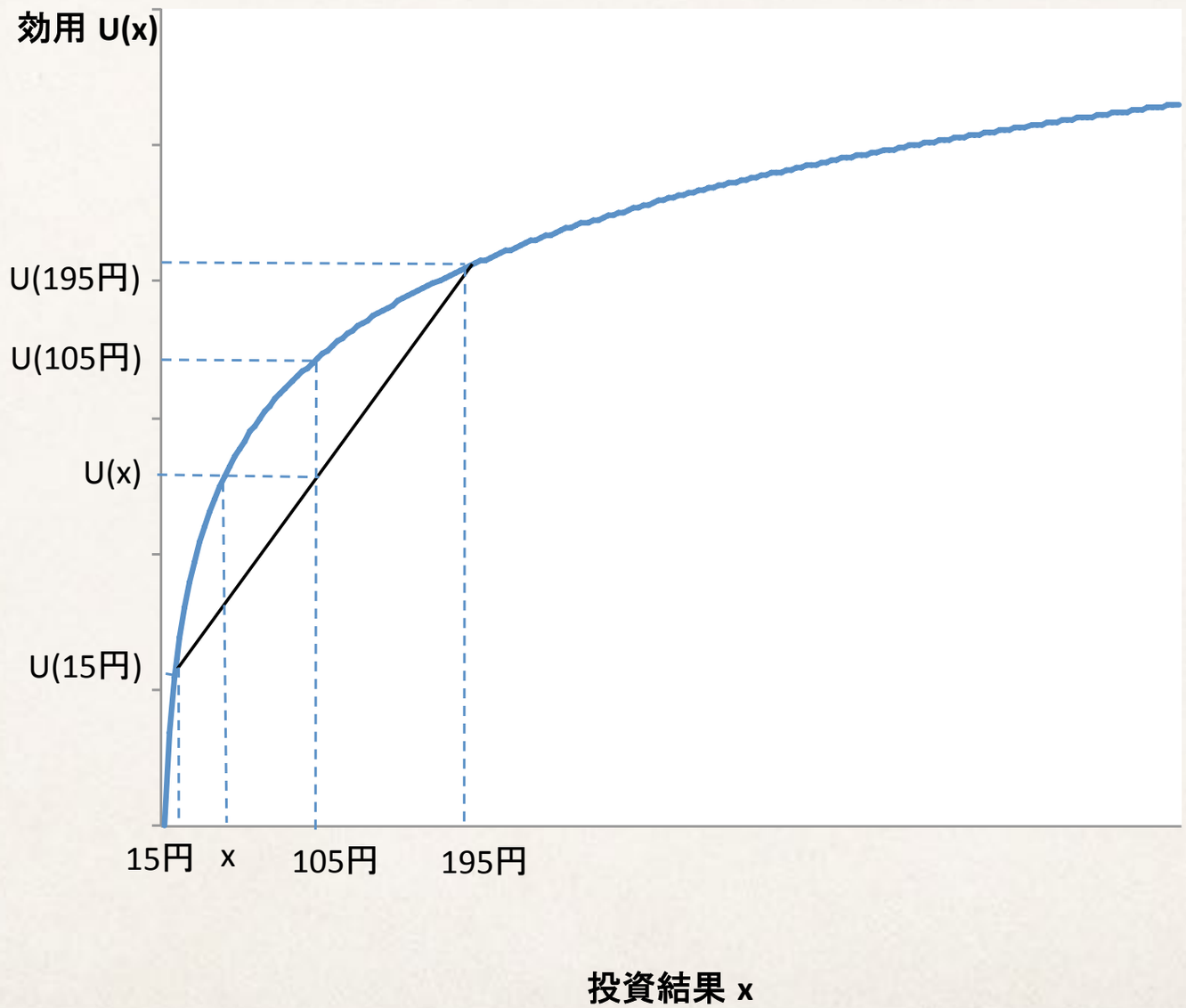
期待値、標準偏差、期待効用

	期待値	標準偏差	期待効用
安全資産	105円 （5%）	0円 （0%）	U(105)
証券A	105円 （5%）	80円 （80%）	[U(185)+U(25)]÷2
証券B	105円 （5%）	90円 （90%）	[U(195)+U(15)]÷2

証券Aの期待効用



証券Bの期待効用



期待効用と証券投資の要点

- 期待効用：
  - 効用関数は増加かつ凹関数 ➡️ 投資家はリスク回避的
  - 期待効用は「投資家の効用の期待値」
  - 証券価格（or 収益率）の期待値が等しいとき、その標準偏差（＝リスク）が大きいほど期待効用は低い
- 期待効用最大化の原則：
  - 投資家は自身の期待効用を最大化するように行動する

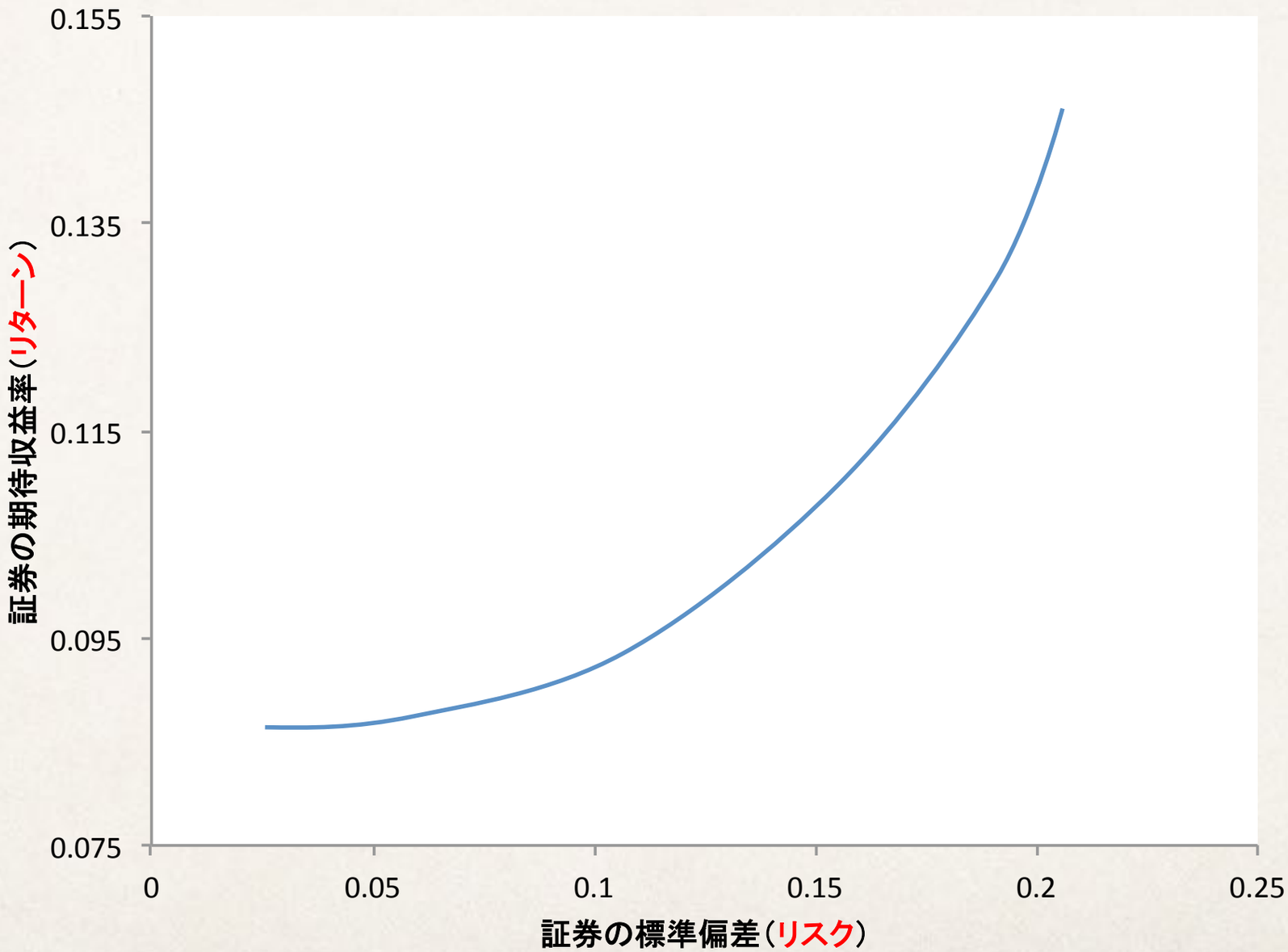
投資家の選好と効用無差別

- 投資家の選好：
  - 投資家はリスク回避的であると仮定
  - 2つの証券があったとき、リスク（＝標準偏差）が等しければ、リターン（＝期待収益率）の大きい証券を選好
- 効用無差別：
  - 期待効用を計算したとき、証券AとBが同じ効用となるのは？

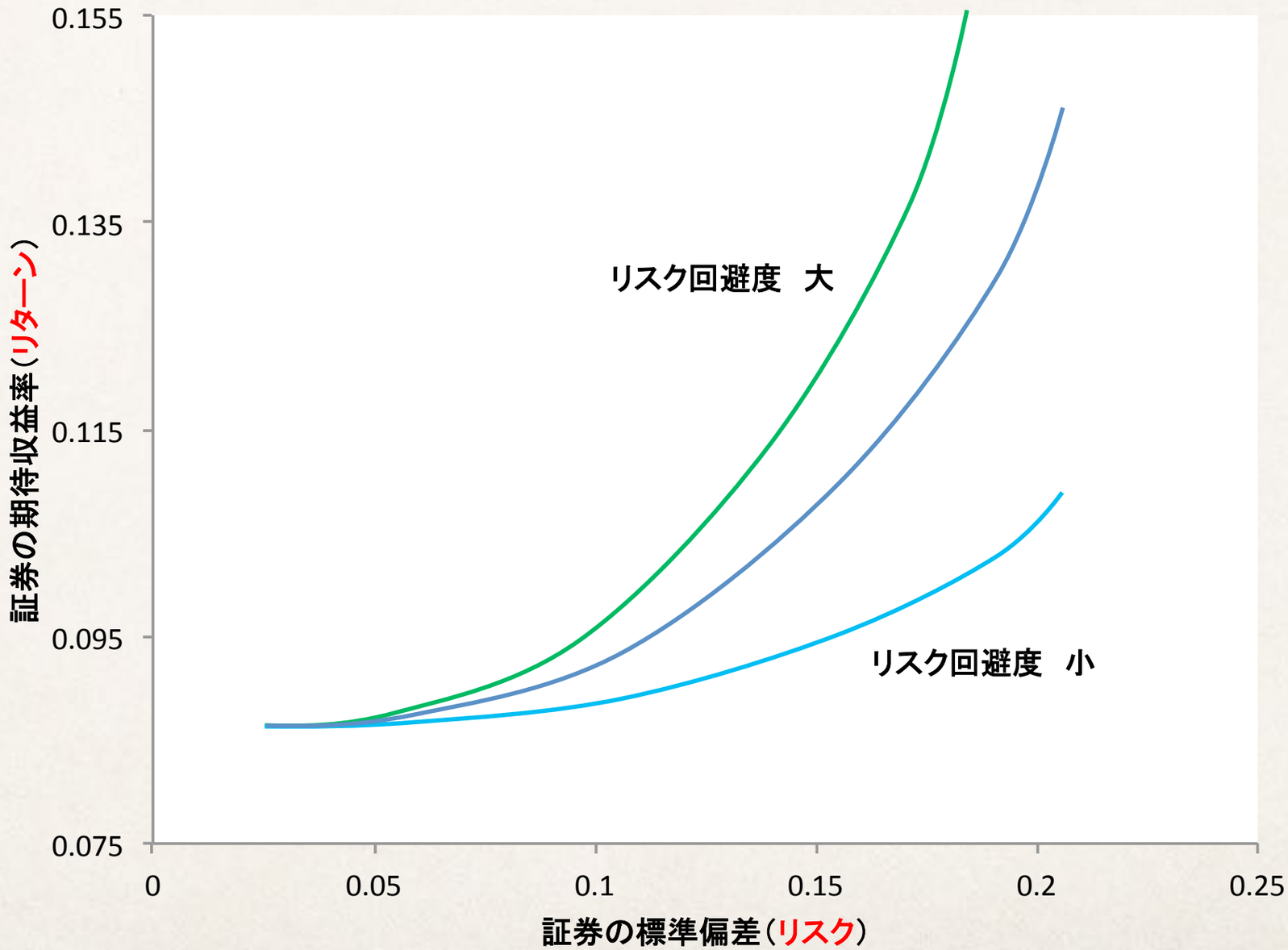
    証券A：リターン小、リクス小

    証券B：リターン大、リスク大

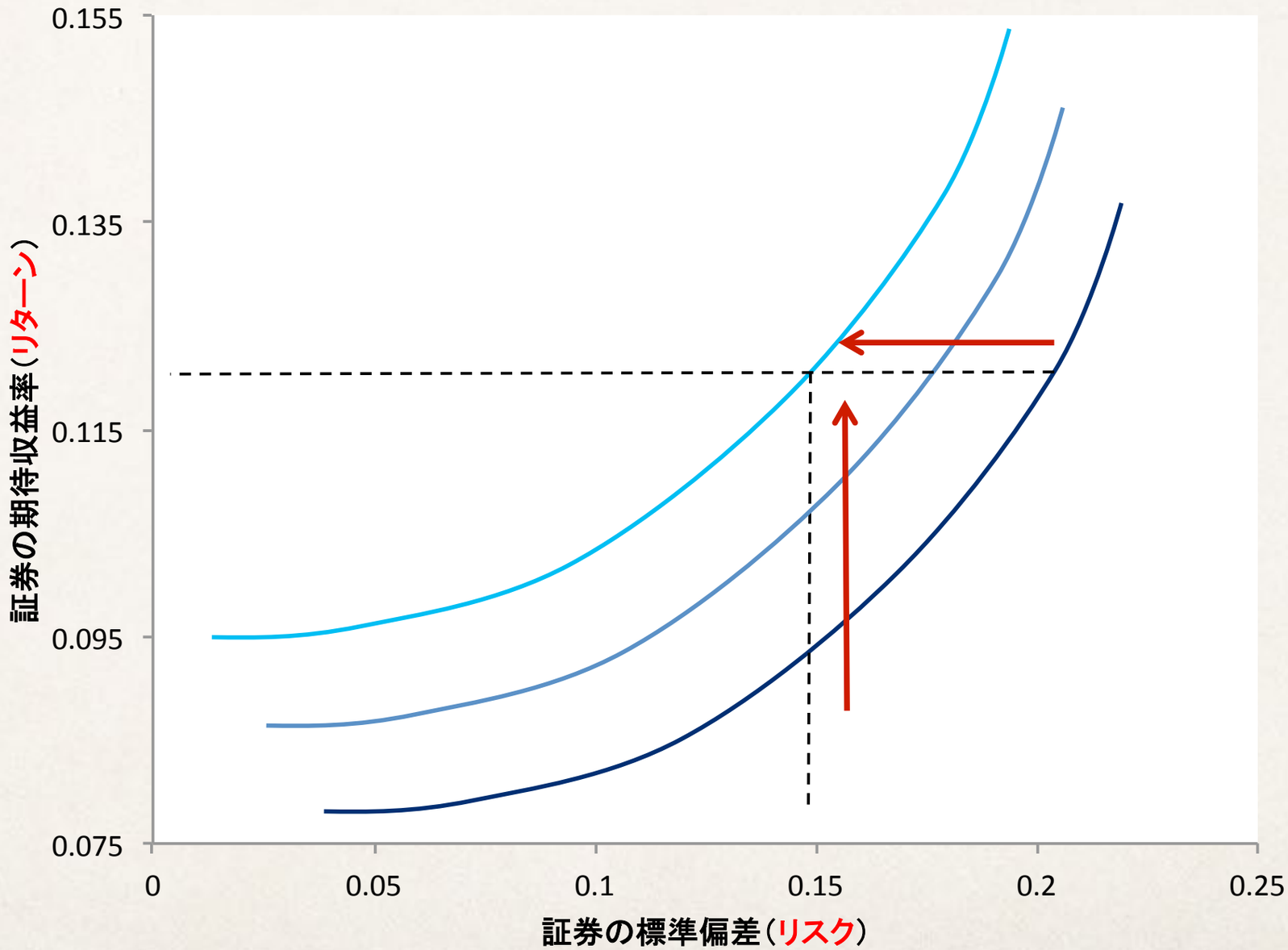
効用無差別曲線


0.155
0.135
0.115
0.095
0.075
証券の期待収益率（リターン）
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
証券の標準偏差（リスク）

リスク回避度と無差別曲線



投資機会の改善


0.155
0.135
0.115
0.095
0.075
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
証券の期待収益率（リターン）
証券の標準偏差（リスク）

投資機会集合

2つの証券のリスクとリターン

	期待収益率（リターン）	標準偏差（リスク）	投資比率（$w_A+w_B=1$）	相関係数／共分散
証券A	μ_A	σ_A	w_A	ρ_{AB}／σ_{AB}
証券B	μ_B	σ_B	w_B	

ポートフォリオのリスクとリターン

- **ポートフォリオのリターン：**

$$\mu_P = w_A \mu_A + w_B \mu_B$$

- **ポートフォリオのリスク：**

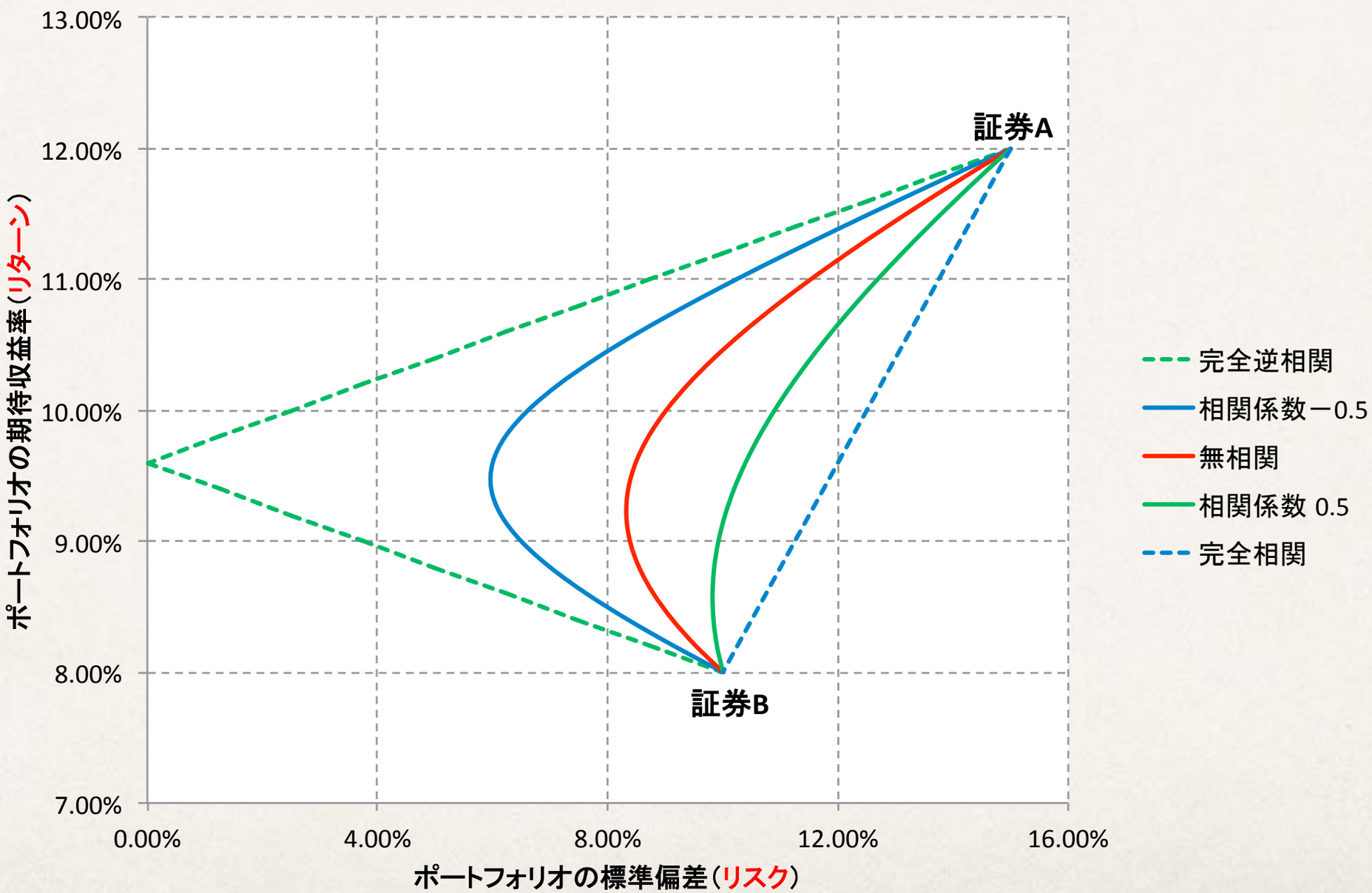
$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_{AB}} \\ &= \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B}\end{aligned}$$

例題

例題：次のように証券AとBへの投資を考えている。この2つの証券からなるポートフォリオのリターン（期待収益率）とリスク（標準偏差）を求めよ。

	期待収益率（リターン）	標準偏差（リスク）	投資比率（$w_A+w_B=1$）	相関係数
証券A	12%	15%	0.4	-0.5
証券B	8%	10%	0.6	

2つの証券の投資機会集合



2つの証券の投資機会曲線

簡単のために $\rho_{AB}=0$ とし、$w:=w_A$ と書くことにする．すると μ_P は

$$\mu_P = w\mu_A + (1-w)\mu_B = \alpha w + \beta$$

ただし、$\alpha := \mu_A - \mu_B$、$\beta = \mu_B$ である．σ_P^2 を計算すると

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 \\
&= (\alpha w + \beta - \beta)^2\sigma_A^2/\alpha^2 + (\alpha - [\alpha w + \beta - \beta])^2\sigma_B^2/\alpha^2 \\
&= (\mu_P - \beta)^2\sigma_A^2/\alpha^2 + (\alpha - [\mu_P - \beta])^2\sigma_B^2/\alpha^2
\end{aligned}$$

したがって、分散 σ_P^2 と期待収益率 μ_P は放物線を描くことがわかる．さらに双曲線 $f(x,y)$ は次式で定義できることに注意する．

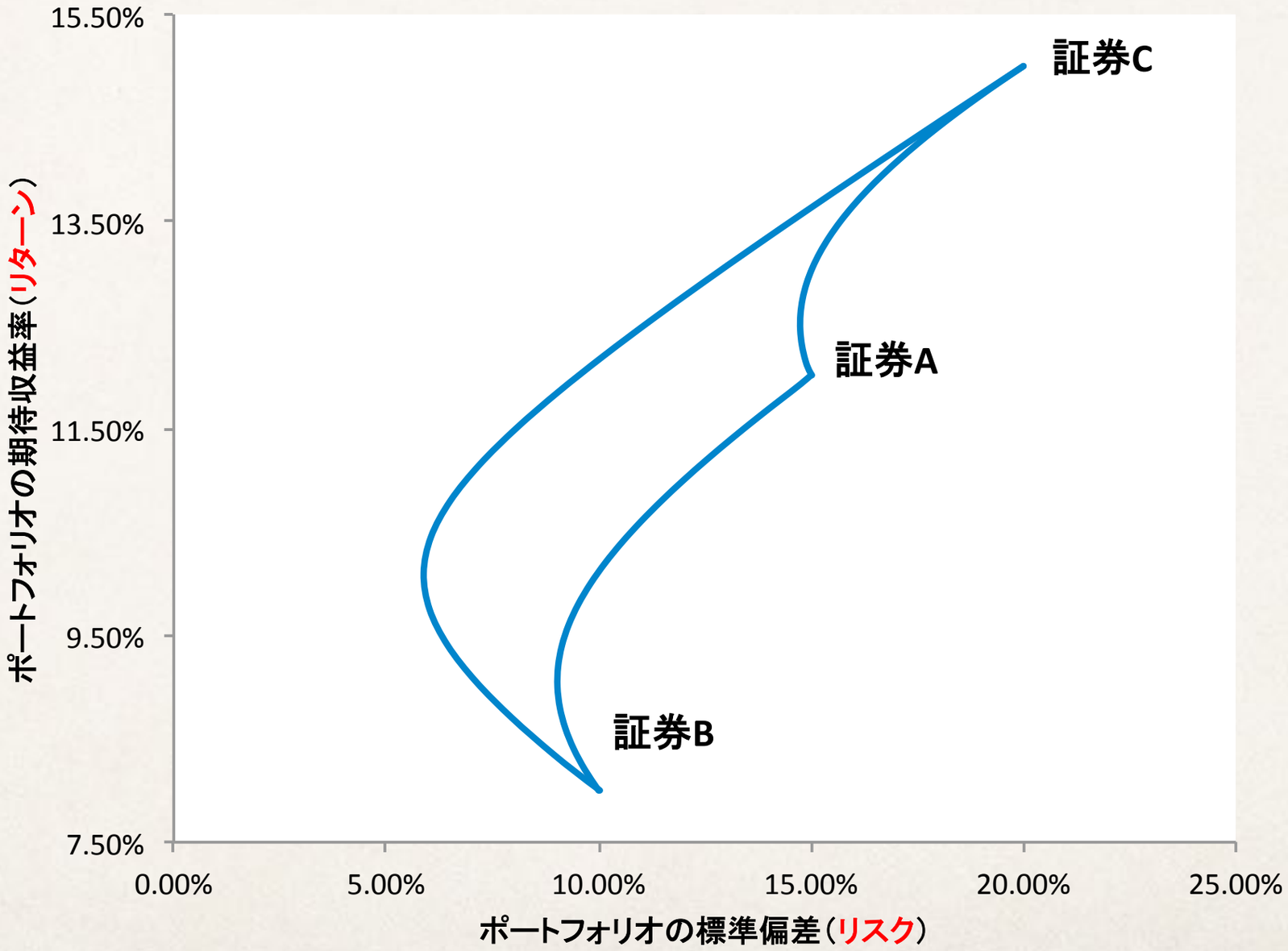
$$A_{xx}x^2 + 2A_{xy}xy + A_{yy}y^2 + 2B_x x + 2B_y y + C = 0 \quad \text{s.t} \quad \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{xy} & A_{yy} \end{vmatrix} < 0$$

$x = \sigma_P$、$y = \mu_P - \beta$ とすると、

$$\begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{xy} & A_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)/\alpha^2 \end{vmatrix} < 0$$

したがって、標準偏差 σ_P と期待収益率 μ_P は双曲線を描くことがわかる．

複数証券の投資機会集合



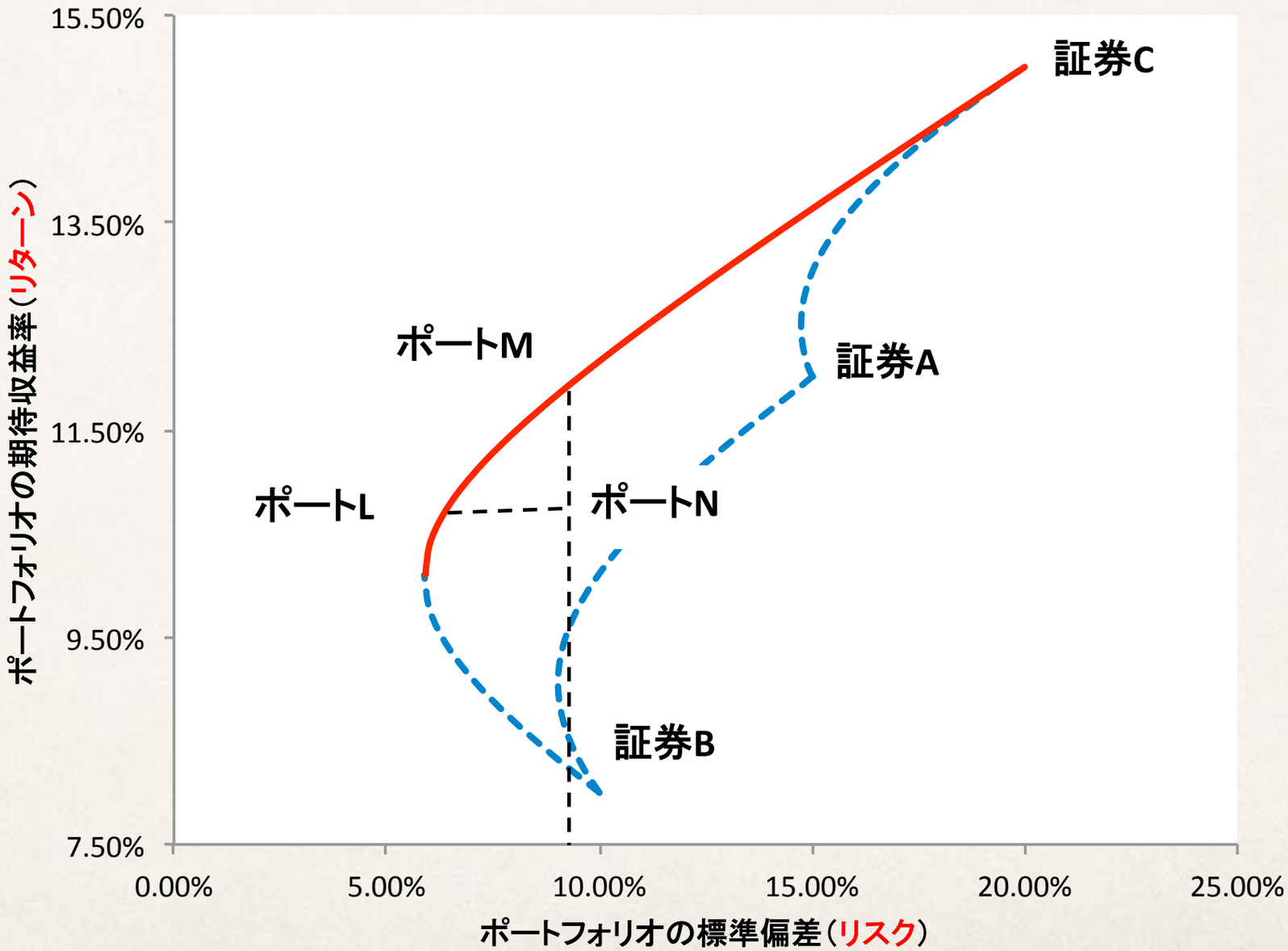
例題

例題：次の証券AとBへの投資を考えている。この2つの証券からなるポートフォリオのリスク（標準偏差）が 0 となる投資比率を求めよ。また、そのポートフォリオのリターン（期待収益率）を求めよ。

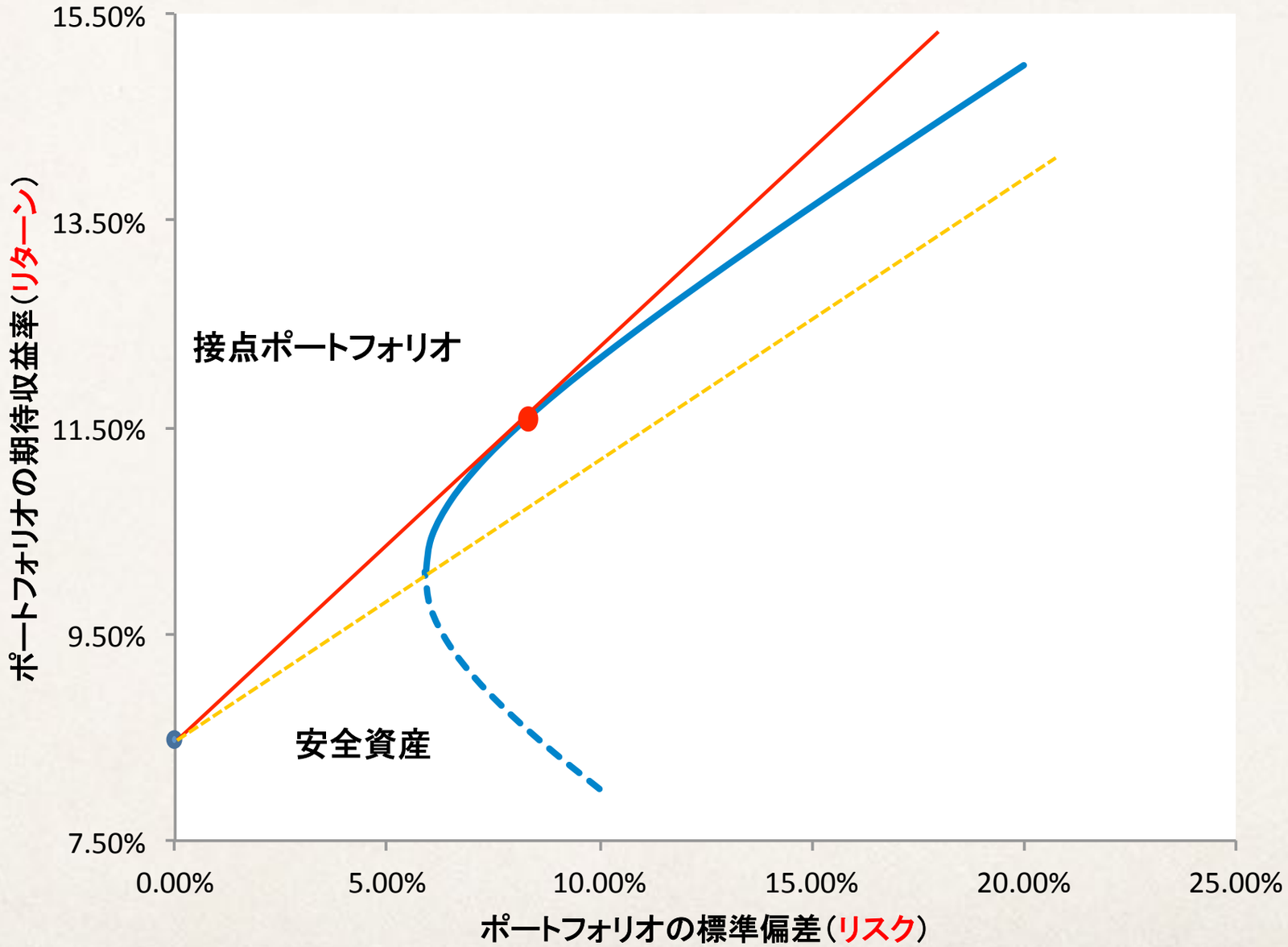
	期待収益率（リターン）	標準偏差（リスク）	投資比率（$w_A+w_B=1$）	相関係数
証券A	12%	15%	?	-1（完全逆相関）
証券B	8%	10%	?	

最適ポートフォリオ

効率的フロンティア


15.50%
13.50%
11.50%
9.50%
7.50%
0.00%
5.00%
10.00%
15.00%
20.00%
25.00%
ポートフォリオの期待収益率（リターン）
ポートフォリオの標準偏差（リスク）
証券C
ポートM
証券A
ポートL
ポートN
証券B

安全資産と接点ポートフォリオ



安全資産とリスク資産の投資機会

安全資産の期待収益率を μ_f と書くと、標準偏差 $\sigma_f = 0$、相関係数 $\rho_{Pf} = 0$ であることに注意する．リスク資産のポートフォリオ P と安全資産の組み合わせからなるポートフォリオを Q とすると

$$\mu_Q = w\mu_P + (1-w)\mu_f = \alpha w + \beta$$

ただし、$\alpha := \mu_P - \mu_f$、$\beta = \mu_f$ である．σ_Q^2 を計算すると

$$\sigma_Q^2 = w^2\sigma_P^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_Q = w\sigma_P$$

したがって、

$$\sigma_Q = w\sigma_P = (\alpha w + \beta - \beta)\sigma_P/\alpha = (\mu_Q - \beta)\sigma_P/\alpha$$

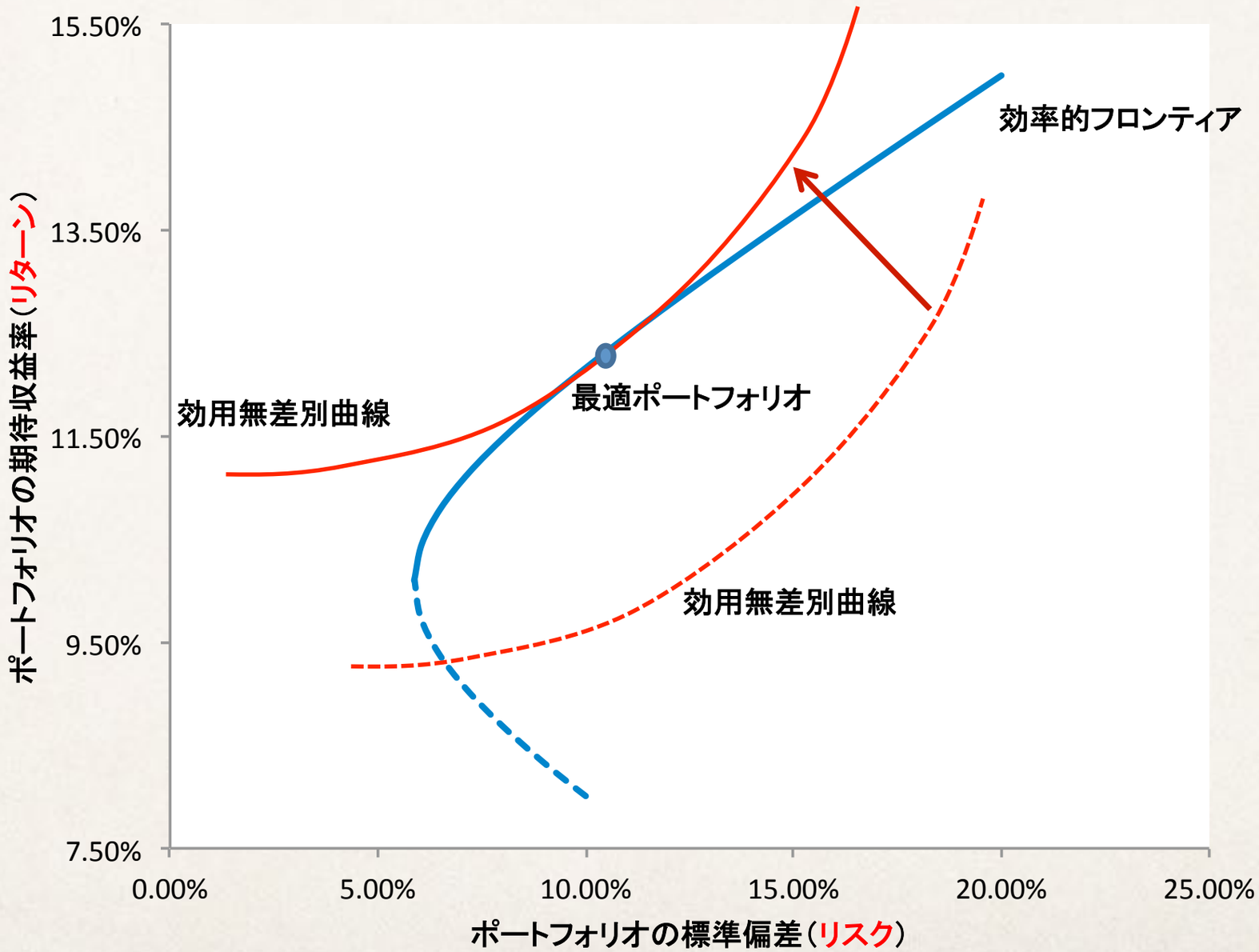
となるので、標準偏差 σ_Q と期待収益率 μ_Q は直線を描くことがわかる．

例題

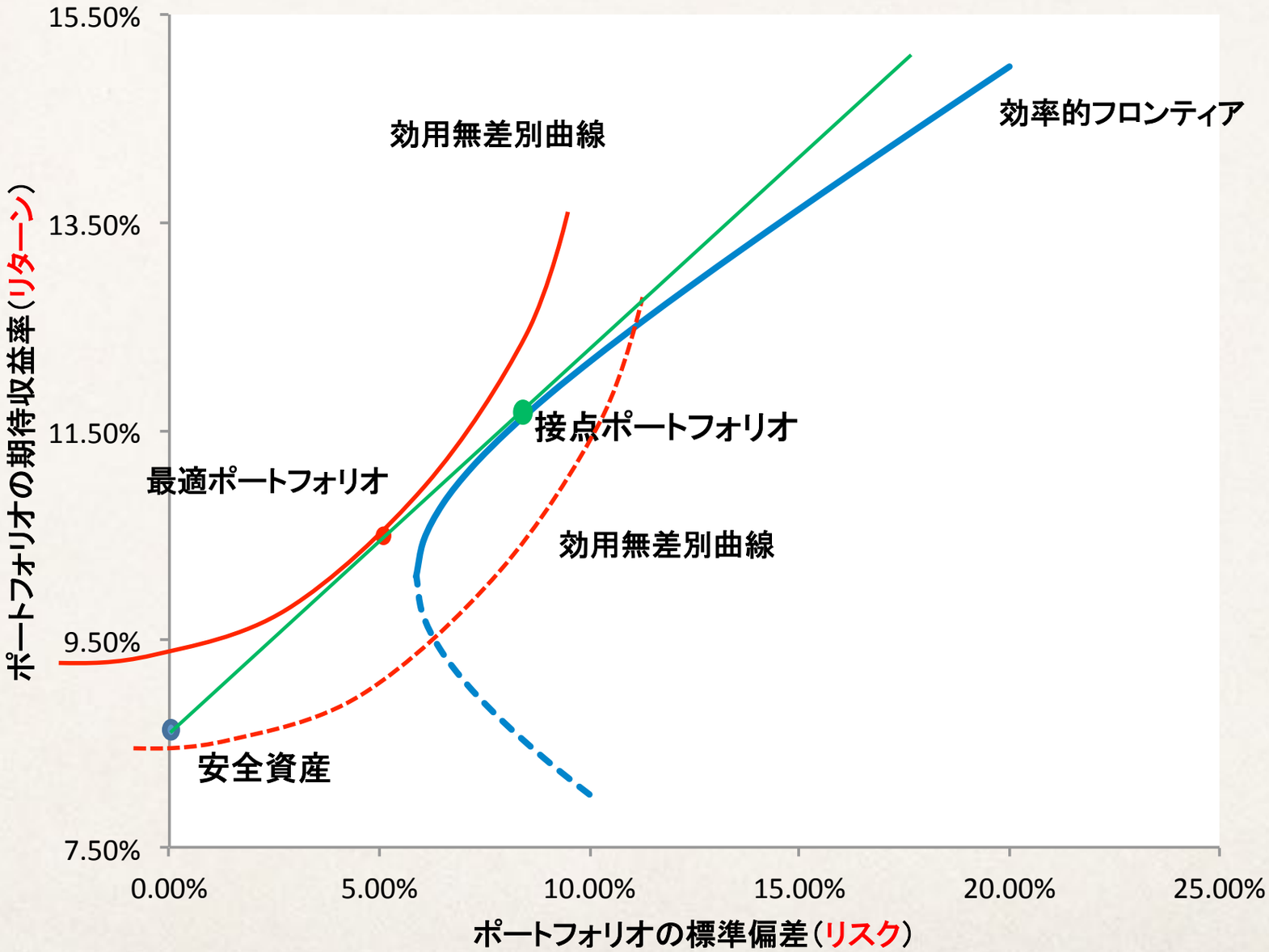
例題：次の安全資産とリスク資産からなるポートフォリオへの投資を考えている。これら2つの組み合わせからなるポートフォリオのリターン（期待収益率）とリスク（標準偏差）を求めよ。

	期待収益率（リターン）	標準偏差（リスク）	投資比率（$w_A+w_B=1$）	相関係数
安全資産	5%	0%	0.5	—
リスク資産ポートフォリ	10%	15%	0.5	

ポートフォリオの選択（1）



ポートフォリオの選択（2）



最適投資戦略

リスク資産のみからなる証券市場の場合：

リスク回避的な投資家にとっての最適ポートフォリオは、効率的フロンティアと投資家の効用無差別曲線の接点である

安全資産が存在する証券市場の場合：

リスク回避的な投資家にとっての最適ポートフォリオは、接点ポートフォリオと安全資産を結ぶ直線（接線）と投資家の効用無差別曲線の接点である

Tobinの分離定理

J. Tobinはリスク回避的な投資家の証券投資の意思決定は次の2つのプロセスに分離することができることを示した

① リスク資産のみからなるポートフォリオのうち、最も効率的なポートフォリオ（＝接点ポートフォリオ）を決定する

➡️ 投資家の効用とは独立に決定

② この効率的なポートフォリオと安全資産の投資比率を決定する

➡️ 投資家の効用に応じて決定