

オプションプライシングと ボラティリティ変動に関する一考察

法政大学 経営学部 経営学科 山寄輝ゼミナール

4 年 小倉大樹 指導教員：山寄輝 准教授

<要旨>

本論文では、株式を原資産とするオプションのプライシング理論において定数と仮定されているボラティリティを関数として捉えることによって導かれる、より現実的なモデルを研究する。また数値検証を行うことでそのモデルがどのようなボラティリティ・スマイルを持つのかを示す。具体的には、①ボラティリティが従う関数の研究、②ボラティリティが確率変動すると仮定したときの拡張した **Black-Scholes** モデルの研究、③拡張したモデルから観察されるボラティリティ・スマイルの分析の順でこれを行うものとし、さらに、ボラティリティ・スマイルの分析結果から明らかになったことと現実のマーケットでの事例を比較しそこにどのような整合性をもつのかを考察する。

目次

1. はじめに.....	3
2. Black-Scholes モデル.....	4
2-1 Black-Scholes モデル.....	4
2-2 Black-Scholes 微分方程式.....	5
2-3 Black-Scholes 価格式.....	5
2-4 Black-Scholes モデルの問題点.....	6
3. ボラティリティが従う関数の研究.....	6
3-1 平均回帰性を考慮したボラティリティ関数.....	7
3-2 ボラティリティのサンプルパス.....	7
4. ボラティリティが確率変動すると仮定したときの 拡張した Black-Scholes モデルの研究.....	8
4-1 確率ボラティリティモデル.....	8
4-2 確率ボラティリティモデルの微分方程式.....	9
4-3 ボラティリティリスクプレミアムと先行研究.....	12
5. 拡張したモデルから観察されるボラティリティ・スマイルの分析.....	13
5-1 ボラティリティ・スマイルの分析.....	13
5-2 株式の対数収益率の分布の分析.....	17
6. 分析結果と結論.....	24
6-1 分析結果と現実のマーケットとの整合性.....	24
6-2 結論.....	25
参考文献.....	27
補論 1.....	27
補論 2.....	33

1. はじめに

近年、金融の世界において派生商品（デリバティブ）の重要性はますます高まっている。デリバティブとは債券（bond）や外国為替（foreign exchange）、株式（stock）などの基本的な金融取引から派生した金融商品である。また、従来取引対象としていたこれらの商品以外にも、クレジット（credit）や天候（weather）などのリスクを取り扱うものや、エキゾチックオプション（exotic option）と呼ばれる複雑なペイオフを持つものも誕生している。そもそも現在のデリバティブ市場がここまで発展した背景は、1997年にノーベル経済学賞を受賞した Myron Scholes と Robert Merton の存在をなくしては語るができないだろう。彼らの功績は多く、なかでも Black-Scholes モデルと呼ばれるモデルは、トレーダーのデリバティブ評価に際して多大な影響をもたらしてきた。例えば株式の理論価格を算出する際、企業の成長率や収益率、投資家の要求利回りを予想しインプットしなければならないため、評価主体の主観に左右される場合が多い。これに対してデリバティブの理論価格を求めるには、無裁定な市場を仮定し、原資産価格の確率モデルを定めてしまえばあとは評価時点の市場の状態をインプットすればよく、これは演繹的に決まる。

しかしながら、実務における問題として、トレーダーは本当に Black-Scholes モデルに従ってデリバティブ価格を決定しているのだろうか。Black-Scholes モデルには、いくつかの非現実的な仮定が置かれている。仮定が現実的でなければ、導かれる結果も現実的なものではないといえる。そこで、この問題に対する一つのアプローチとして、これらの仮定を拡張することによってより適切なデリバティブ価格を計算し、従来の Black-Scholes モデルと比較することを試みる。

本論文の目的は、株式を原資産とするコールオプション（call option）とプットオプション（put option）のプライシング理論において、定数と仮定されているボラティリティ（volatility）を何らかの関数として捉えることによって導かれる、より現実的なモデルを研究することである。オプション価格は（i）原資産価格、（ii）権利行使価格、（iii）残存期間、（iv）金利、（v）ボラティリティの5つの要因で決定するが、筆者がボラティリティというパラメータに注目した理由は、（i）～（iv）については評価時点で外生的に与えられるものに対し、（v）は一意的に与えられる性格のものではないという特殊性と、ボラティリティは可変的であるという先行研究はすでにあるものの依然注目が集まる分野だと感じたという2点にある。またそのモデルにおいて数値的な検証を行うことによって、ボラティリティ・スマイル（volatility smile）がどのような特徴を持つのかを分析する。ボラティリティ・スマイルとはインプライド・ボラティリティ（implied volatility）を行使価格の関数として表わしたものであり、現実のマーケットでも観測されるので、これを分析することによって投資家がマーケットに対してどのような予想をもっているのかを考察する。

本論文の構成は以下の通りである。まず第2章で Black-Scholes モデルで定義される

株価モデルと、オプションのプライシングについて言及する。そしてこのモデルがもつ問題点にも触れることで、より現実的なモデルに拡張できる余地があるということを確認する。第3章ではボラティリティが確率的に変動すると仮定したときに、どのような関数で表現すべきなのかをその関数の特徴とともに示す。また同時に、関数の特徴を、サンプルパスをグラフに示すことによって視覚的に理解する。第4章では第3章で示したボラティリティの関数を組み込んだ、拡張した **Black-Scholes** モデルである確率ボラティリティモデルの特徴、そして確率ボラティリティモデルの微分方程式について、**Black-Scholes** モデルのそれと比較し式の上での相違点を考察する。また、先行研究を用いてボラティリティリスクプレミアムと呼ばれるものが日経 225 オプション市場に存在していることを確認する。第5章では確率ボラティリティモデルでのボラティリティ・スマイルをグラフに示し、パラメータの変化によって同グラフがどのように変化するかを確認する。また、**Black-Scholes** モデルと確率ボラティリティモデルの株式の対数収益率の分布の比較も同時に行い、ボラティリティ・スマイルとの整合性を示す。最後に第6章では、第5章での分析結果と現実のマーケットで観察される事例との整合性を考察し、まとめとして、**Black-Scholes** モデルを確率ボラティリティモデルに拡張することで得られたことを述べ、本論文における結論を示す。

2. Black-Scholes モデル

Black-Scholes モデルとは、1970 年代初頭に Fischer Black、Myron Scholes、および Robert Merton が導出した株価変動のモデルである (Black, F., and M. Scholes (1973)、Merton, R. C. (1973))。このモデルによって、Myron Scholes と Robert Merton の 2 人は 1997 年にノーベル経済学賞を受賞した。本章では、この Black-Scholes モデルの定義と Black-Scholes 微分方程式、及び Black-Scholes 価格式を示す。これによって、後に示す確率ボラティリティモデルと確率ボラティリティモデルの微分方程式との比較をできるようにする。

2-1 Black-Scholes モデル

Black-Scholes モデル (BS モデル) とは、以下で定義されるような株価変動モデルである。

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz \quad (1)$$

ここで S_t は原資産である株式の時点 t での価格、 μ は株価の期待収益率、 σ は株価のボラティリティ、 dz はウィナー過程 (Wiener process) であり、パラメータ μ と σ は定数

として与えられる。ここで上式は、伊藤過程 (Ito process) の形となっていることも確認しておく (補論 1 の 1 を参照)。

また Black-Scholes モデルを前提とした株価過程として、時点 T の株価 S_T は以下のよう
に表わすことができる (補論 1 の 2 を参照)。

$$S_T = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + z_T \sigma \sqrt{T}} \quad (2)$$

(2)の式を用いることによって、任意の時点の株価を簡単に計算することが可能となる。

2-2 Black-Scholes 微分方程式

Black-Scholes 微分方程式とは、以下に表わされる、配当のない株式に対するすべてのデリバティブ価格が満たさなければならない方程式である (導出は補論 1 の 3 を参照)。また、この微分方程式を導出するために置かれる仮定も共に示す。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (3)$$

< 仮定 >

1. 株価は株価過程 ($dS = \mu S dt + \sigma S dz$) に従う
2. 証券は空売り可能で、売却代金はすべて利用できる
3. 取引コストと税金はなく、すべての証券はいくらでも分割して取引できる
4. デリバティブ満期まで配当はない
5. 無リスクの裁定機会は存在しない
6. 証券は連続的に取引される
7. 無リスク金利 r は定数で、すべての満期に対して同一

この微分方程式を解くことによって得られるデリバティブがどういうデリバティブであるかについては、用いられた境界条件によって決定する。例えばヨーロピアン・コールオプションの場合の境界条件は、 $t = T$ のとき $f = \max(S - K, 0)$ 、ヨーロピアン・プットオプションの場合の境界条件は、 $t = T$ のとき $f = \max(K - S, 0)$ で与えられる。

2-3 Black-Scholes 価格式

配当のない株式のヨーロピアン・コールオプションとヨーロピアン・プットオプションの時点 0 における価格を表わす Black-Scholes 価格式は以下のように与えられる。

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (4)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (5)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (6)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (7)$$

2-4 Black-Scholes モデルの問題点

これまでみてきたように、Black-Scholes モデルは式の形としては非常に簡単なものであり、これを用いることによって任意の将来時点の株価、そしてそこからさらにオプション価格を求めることができる。しかしながらここには問題点もある。つまり、“このモデルの仮定は本当に現実的なのか” というものである。この理論に用いられている仮定をより現実的なものへと拡張することができれば、そこから得ることのできる結果もより実用的なものになるのではないだろうか。

冒頭でも述べたが、筆者は同モデルにおいて仮定として置かれている「ボラティリティは定数である」という部分に疑問を感じた。素直に考えればボラティリティは時々刻々と変動するはずであるので、それを一定の値に固定してしまえば必然的にオプション評価にも何らかの影響を与えているはずである。以降の章では、この疑問に対して、「ボラティリティは可変的である」という新たな仮定を与えることによってこれを解決することを試みる。

3. ボラティリティが従う関数の研究

株式のボラティリティは株式から得られる収益の不確実性を表わす指標であり、連続複利ベースでの1年間の収益率の標準偏差として定義されるが、Black-Scholes モデルにおいて、このボラティリティの値は定数として与えられる。しかしながらこれは現実的とは言えないので、本章ではボラティリティは確率変動するという仮定を置き、これを表現する関数形について考える。先行研究では、ボラティリティの変動モデルに関して、Engle (1982) による ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) モ

デル、Bollerslev (1986) による GARCH (generalized ARCH) モデル、そして Heston (1993) による確率ボラティリティモデル (stochastic volatility model) などがある。これらの研究において、ボラティリティは時間の経過とともにある水準に回帰するようにモデル化されている。そこで以降、これらに倣ってボラティリティの平均回帰性を考慮したモデルについて説明する。また、ボラティリティの平均回帰性をより具体的に理解するためにサンプルパスを示す。

3-1 平均回帰過性を考慮したボラティリティ関数

ボラティリティの変動に関するモデルを、平均回帰過程 (Mean-reverting process) を用いて、以下によって定義する。

$$dV_t = a(b - V_t)dt + c\sqrt{V_t}dz_t^2 \quad (8)$$

上式で V_t は時点 t でのボラティリティ、 a は平均回帰係数、 b は平均値、 c は確率過程 V_t のボラティリティ、 z_t^2 はウィナー過程を表わしている。

このモデルのドリフト部分 $a(b - V_t)$ の性質として、① $a > 0$ の場合、② $a < 0$ の場合の 2通りの場合に分けることで次のように考えることができる。

① $a > 0$ の場合

V_t が b より小さければ、 $a(b - V_t)$ は正の値になるので増加方向に動く。

V_t が b より大きければ、 $a(b - V_t)$ は負の値になるので減少方向に動く。

② $a < 0$ の場合

V_t が b より小さければ、 $a(b - V_t)$ は負の値になるので減少方向に動く。

V_t が b より大きければ、 $a(b - V_t)$ は正の値になるので増加方向に動く。

次に確率変動部分に係る部分 $c\sqrt{V_t}$ の性質として、① c の値が大きい場合、② c の値が小さい場合の 2通りの場合に分けることで次のように考えることができる。($c > 0$ とする)

① c の値が大きい場合

$\sqrt{V_t} > 0$ より、 c が大きいほどウィナー過程による確率変動の影響が大きくなる。

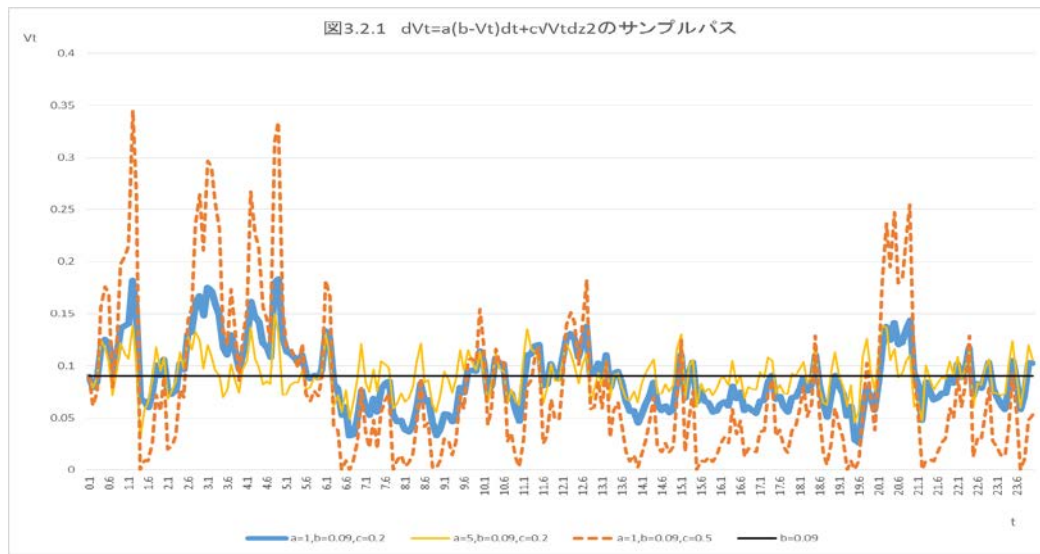
② c の値が小さい場合

$\sqrt{V_t} > 0$ より、 c が小さいほどウィナー過程による確率変動の影響が小さくなる。

3-2 ボラティリティのサンプルパス

ここでは、前述したボラティリティ関数のパラメータ a 、 c の変化がどのような影響を及ぼすのかをグラフを描くことで視覚的に確認する。

ボラティリティの変動 $dV_t = a(b - V_t)dt + c\sqrt{V_t}dz_t^2$ を示したものが以下の図 3.2.1 である。グラフは横軸に時間 t 、縦軸に時点 t のボラティリティ V_t をとっており、パラメータ a 、 c を変化させることで確認できたことと共に示す。



※グラフでは $a = 1, b = 0.09, c = 0.2$ をベンチマークとして、 $a = 5, c = 0.5$ に変更した場合のそれぞれのパスを示した

- ・パラメータ a の値が大きいほど、パラメータ b の値に回帰する強さが大きくなる
- ・パラメータ c の値が大きいほど、パラメータ b の値から乖離する強さが大きくなる

4. ボラティリティが確率変動すると仮定したときの

拡張した Black-Scholes モデルの研究

Heston(1993)は、ボラティリティは確率変動すると考えることで、株価とボラティリティの2つを確率変数とするモデルを生み出した。本章ではこの確率ボラティリティモデルの式とこのモデルの特徴、そして微分方程式を示して Black-Scholes モデルとどのような相違点があるのかを確認する。

4-1 確率ボラティリティモデル

確率ボラティリティモデル (SV モデル) とは、以下で定義されるような株価変動モデルである。

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t \varepsilon_1 \sqrt{dt} \quad (9)$$

$$dV_t = a(b - V_t)dt + c\sqrt{V_t}(\rho\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2)\sqrt{dt} \quad ,$$

$$\sigma_t = \sqrt{V_t} \quad (10)$$

上式で S_t は時点 t の株価、 r は無リスク金利、 ε_1 、 ε_2 は標準正規分布に従う互いに独立な変数、 V_t は時点 t のボラティリティ、 a は平均回帰係数、 b は平均値、 c は確率過程 V_t のボラティリティ、 ρ は ε_1 と $\rho\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2$ の相関係数 (補論 1 の 4 を参照) である。確率ボラティリティモデルでは、株価リターンボラティリティ自体が、ある平均回帰的な確率過程の関数として表現されている。また、オプションプライシングにおけるこのモデルの特徴として、ボラティリティリスクプレミアムの存在をあげることができる。後に説明するが、ボラティリティリスクプレミアムとは、ボラティリティ自身の変動がもたらす不確実性に対するリスクプレミアムのことである。これは Black-Scholes モデルでは存在しない (正確には、消去することができる) ので、確率ボラティリティモデルを扱う上では重要な概念である。

4-2 確率ボラティリティモデルの微分方程式

ここでは確率ボラティリティモデルの微分方程式を、無リスクポートフォリオ構築に基づく評価法によって示し、ボラティリティリスクプレミアムの存在を確認する。なお式の導出は宮崎浩一 (2009) の第 5 章を参考にし、ボラティリティが CIR 過程の関数形として表現される場合の確率ボラティリティモデルとして筆者が書き直した。

式(9)、(10)で定義したものをそれぞれ

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t \varepsilon_1 \sqrt{dt} \quad ,$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1 \quad (9)'$$

$$dV_t = a(b - V_t)dt + c\sqrt{V_t}\rho\varepsilon_1\sqrt{dt} + c\sqrt{V_t}\sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2\sqrt{dt} \quad ,$$

$$dV_t = a(b - V_t)dt + c\sqrt{V_t}\rho dW_t^1 + c\sqrt{V_t}\sqrt{1 - \rho^2}dW_t^2 \quad (10)'$$

と書き換えたもの(9)' を確率ボラティリティモデル、(10)' をボラティリティ関数とする。

コールオプションの時刻 t における価格を $F_t = F(S_t, V_t, t)$ とし、 S_t の確率過程に(9)'、 V_t の確率過程に(10)' を用いるとすると、2次元の伊藤の公式（補論1の5を参照）を適用することによって F_t は以下に示すような微分方程式に従うことがわかる。

$$\frac{dF_t}{F_t} = \mu_F dt + \sigma_{1F} dW_t^1 + \sigma_{2F} dW_t^2 \quad (11)$$

$$\mu_F = \frac{1}{F} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + a(b - V) \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{1}{2} V S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \rho c S V \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2} c^2 V \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right) \quad (12)$$

$$\sigma_{1F} = \frac{1}{F} \left(\frac{\partial F}{\partial S} \sqrt{V} S + c \sqrt{V} \rho \frac{\partial F}{\partial V} \right) \quad (13)$$

$$\sigma_{2F} = \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial V} c \sqrt{V} \sqrt{1 - \rho^2} \quad (14)$$

(9)'、(10)'、(11)~(14)の式を見てわかるように、確率ボラティリティモデルでは、不確実性を表わすウィナー過程が dW_t^1 、 dW_t^2 の2つあるので、式(3)で示した Black-Scholes 微分方程式の導出のときのようなコールオプションの売却と原資産である株式の購入で構築される無リスクポートフォリオを作ることができない。そこで、対象となるコールオプションと同じペイオフを持ち、満期のみが異なるコールオプションを用いて無リスクポートフォリオを構築することを試みる。

対象となるコールオプションをコールオプション (I)、無リスクポートフォリオ構築のためのコールオプションをコールオプション (II) とし、それぞれの価格を $F_t^{(I)}$ 、 $F_t^{(II)}$ とする。コールオプション (I) を1単位売却、株式とコールオプション (II) をそれぞれ ΔS 、 $\Delta F^{(II)}$ ずつ購入するとポートフォリオの収益率は、

$$-1 \frac{dF^{(I)}}{F^{(I)}} + \Delta S \frac{dS}{S} + \Delta F^{(II)} \frac{dF^{(II)}}{F^{(II)}} \quad (15)$$

となるので、これが無リスクポートフォリオになるためには dW_t^1 、 dW_t^2 の項がともに0になる必要がある。コールオプション $F^{(I)}$ 、 $F^{(II)}$ が満たす微分方程式は、式(11)~(14)の F をそれぞれ $F^{(I)}$ 、 $F^{(II)}$ に置き換えたものであり、これらを式(15)に代入して dW_t^1 、 dW_t^2 に関する項がともに0とおけば、

$$-1 \sigma_{1F^{(I)}} + \Delta S \sqrt{V} + \Delta F^{(II)} \sigma_{1F^{(II)}} = 0 \quad (16)$$

$$-1\sigma_{2F^{(I)}} + \Delta F^{(II)}\sigma_{2F^{(II)}} = 0 \quad (17)$$

が得られる。またこれは無リスクポートフォリオなので、無裁定条件からその収益率は無リスク金利に等しくなければならないので、

$$-1\mu_{F^{(I)}} + \Delta S\mu + \Delta F^{(II)}\mu_{F^{(II)}} = r(-1 + \Delta S + \Delta F^{(II)}) \quad (18)$$

となる。

連立方程式(16)、(17)の解を式(18)に代入し、整理すると、

$$\frac{\sqrt{V}(\mu_{F^{(I)}} - r) - \sigma_{1F^{(I)}}(\mu - r)}{\sigma_{2F^{(I)}}\sqrt{V}} = \frac{\sqrt{V}(\mu_{F^{(II)}} - r) - \sigma_{1F^{(II)}}(\mu - r)}{\sigma_{2F^{(II)}}\sqrt{V}} \quad (19)$$

が得られる。この式(19)は満期のみが異なるコールオプションに関して等しいので、

$$\Gamma(S, V, t) \equiv \frac{\sqrt{V}(\mu_{F^{(I)}} - r) - \sigma_{1F^{(I)}}(\mu - r)}{\sigma_{2F^{(I)}}\sqrt{V}} \quad (20)$$

で定義される $\Gamma(S, V, t)$ は、満期に依存しないパラメータといえる。この $\Gamma(S, V, t)$ はボラティリティリスクの市場価格と呼ばれる。

そして式(12)~(14)を式(20)に代入すると、以下に示す確率ボラティリティモデルの微分方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}VS^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \rho cSV \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2}c^2V \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + r(S \frac{\partial F}{\partial S} - F) \\ & + (a(b - V) - cp(\mu - r) - c\sqrt{V}\Gamma(S, V, t)\sqrt{1 - \rho^2}) \frac{\partial F}{\partial V} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

を得ることができる。終端条件は、 $F(S, V, T) = \max(S - K, 0)$ であり V の領域は $(-\infty, \infty)$ となる。

また、式(21)の左辺は以下の4つのグループに分類することができる。

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} V S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + r(S \frac{\partial F}{\partial S} - F) \quad (22)$$

$$\textcircled{2} \quad \rho c S V \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} \quad (23)$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{2} c^2 V \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + a(b - V) \frac{\partial F}{\partial V} \quad (24)$$

$$\textcircled{4} \quad -c(\rho(\mu - r) + \sqrt{V} \Gamma(S, V, t) \sqrt{1 - \rho^2}) \frac{\partial F}{\partial V} \quad (25)$$

グループ①は、Black-Scholes 微分方程式(3)において $\sigma = \sqrt{V}$ としたものである。グループ②は、株価過程とボラティリティが従う確率過程との相関によるものである。グループ③は、ボラティリティが従う確率過程に関する生成要素である。そして最後のグループ④は、ボラティリティリスクの市場価格に関するものである。ここでグループ④については、株価とボラティリティの相関が $|\rho| = 1$ のときにボラティリティリスクの市場価格の影響がなくなることが式の形からわかる。

さて、オプションのリターンを表わす項は式(12)で与えられるが、この式に式(21)を代入して整理すると

$$\mu_F = \frac{1}{F} ((\mu - r) (S \frac{\partial F}{\partial S} + c \rho \frac{\partial F}{\partial V}) + rF + c \sqrt{V} \Gamma \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial F}{\partial V}) \quad (26)$$

となる。この式をみると確率過程 V_t のボラティリティを表わすパラメータ c が大きくなれば、オプションのリターンが増加する量は、株式の期待リターンと無リスク金利の差 $(\mu - r)$ に応じて増加する部分と、ボラティリティリスクの市場価格 Γ に応じて増加する部分で成り立っていることがわかる。

4-3 ボラティリティリスクプレミアムと先行研究

これまで確率ボラティリティモデルとその微分方程式を式の形で見してきたが、ここでは先行研究を用いて、現実のマーケットにボラティリティリスクプレミアムが存在していることを確認する。

Black-Scholes モデルの枠組みでは、原資産を用いたデルタヘッジによってオプション価格の不確実性を消去することができる。一方、確率ボラティリティモデルではボラティリティ自身の変動による不確実性が残るため、原資産のみを用いたデルタヘッジでオプション価格の不確実性を消去することができず、この部分に関するプレミアムが生じる。これをボラティリティリスクプレミアムと呼び、以下で定義される確率ボラティリティモデルのヘッジゲインの期待値における λ_u がこれにあたる。

$$E_t[\Pi_{t,t+\tau}] = \int_t^{t+\tau} E_t[\lambda_u \frac{\partial F_u}{\partial V_u}] du \quad (27)$$

$$\lambda_u = -c(\rho(\mu - r) + \sqrt{V} \Gamma(S, V, t) \sqrt{1 - \rho^2}) \quad (28)$$

宮崎浩一（2009）の第8章によれば、2003年5月～2005年12月の日経225オプション市場の日次コールオプション価格を用いた実証分析で、「コールオプションを購入し、株式を売却する」デルタヘッジポートフォリオにおいてマネーネス ($y-1 = \frac{S_t e^{(r-z)\tau}}{K} - 1$) が[-10%, -7.5%]、[-7.5%, -5%]、[-5%, -2.5%]、[-2.5%, 0%]、[0%, 2.5%]、[2.5%, 5%]、[5%, 7.5%]、[7.5%, 10%]の8つのバスケットで、[7.5%, 10%]のバスケットを除くほぼすべてのバスケットからオプションの買い手が売り手に対してボラティリティリスクプレミアムを支払っているという結果を示している。また、ATM付近において同デルタヘッジポートフォリオの平均ヘッジゲインの損失が最大になり、ITMやOTMになるにしたがってその損失が減少するという傾向が明らかになっている。

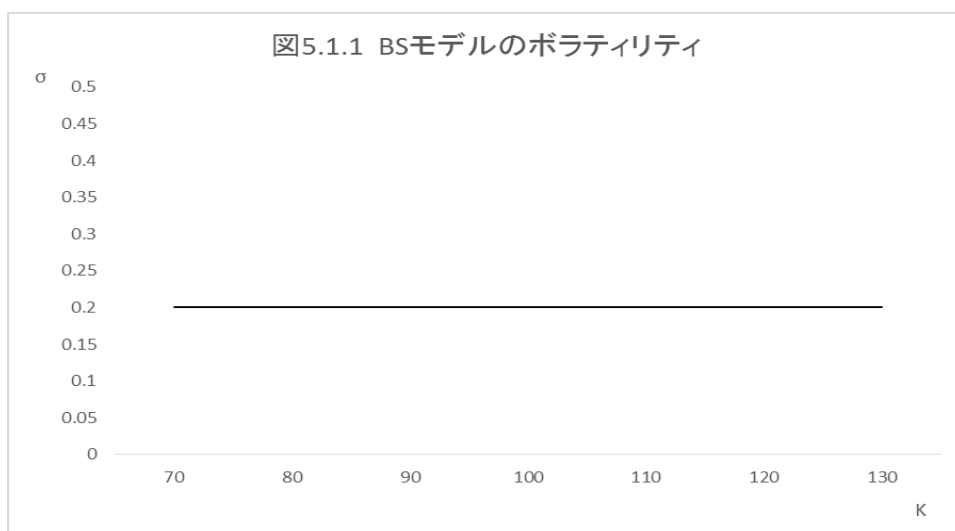
5. 拡張したモデルから観察される

ボラティリティ・スマイルの分析

オプションのインプライド・ボラティリティを行使価格の関数として表わしたものを、ボラティリティ・スマイルという。この章ではボラティリティが一定の値をとると仮定されている Black-Scholes モデルに対して、確率ボラティリティモデルによるオプションプライシングでインプライド・ボラティリティが行使価格ごとに異なる値をとるということを、モンテカルロ・シミュレーションによる数値検証で確認する（計算方法の詳細は、補論2を参照）。加えて確率ボラティリティモデルにおけるパラメータ a 、 c 、 ρ の変化がボラティリティ・スマイルにどのような変化をもたらすのかを観察する。また、Black-Scholes モデルにおいて株式の対数収益率は正規分布に従うと仮定されているが、確率ボラティリティモデルによる株式の対数収益率はどのような分布の形状となるのかを、それぞれの分布が持つ統計的な性質をもとに比較する。

5-1 ボラティリティ・スマイルの分析

Black-Scholes モデルにおいて、ボラティリティは以下の図 5.1.1 が示すように行使価格に関わらず一定の値（この場合、 $\sigma = 0.2$ ）をとると仮定されている。なお、グラフの縦軸は標準偏差 σ 、横軸は行使価格 K をそれぞれ示している。



次に、確率ボラティリティモデルによるインプライド・ボラティリティの計算だが、まず以下のようなパラメータ設定を行う。

(主なパラメータ)

	ベンチマーク	high	low
a	2	10	0.1
c	0.3	0.5	0.15
ρ	0	0.7	-0.7

(その他のパラメータ)

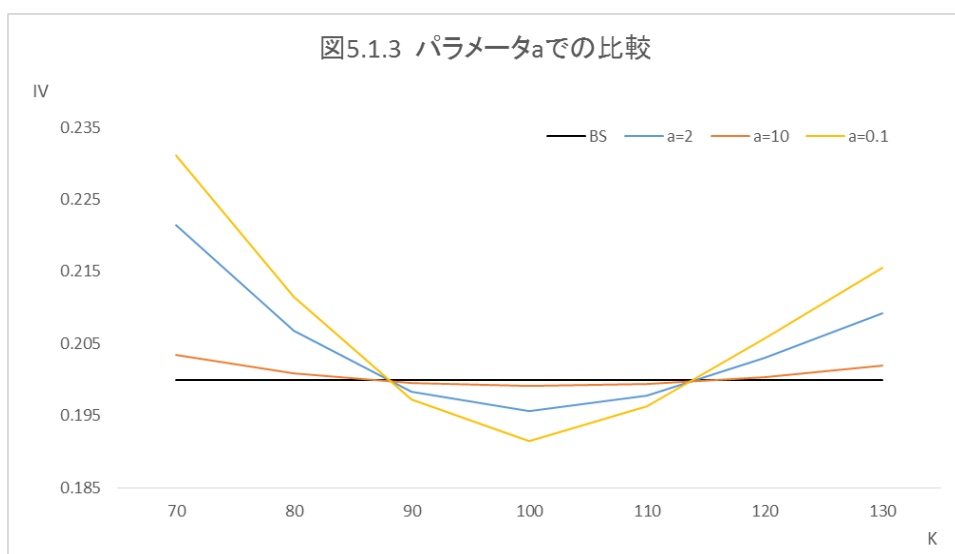
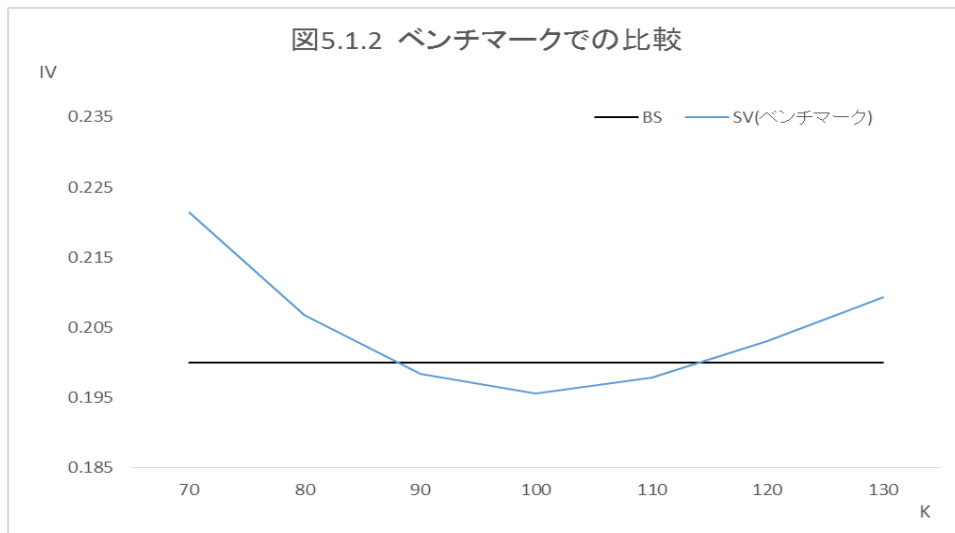
時点 0 の株価	残存期間	金利	標準偏差	時点 0 のボラティリティ
S_0	T	r	σ	V_0
100	0.5	0	0.2	0.04

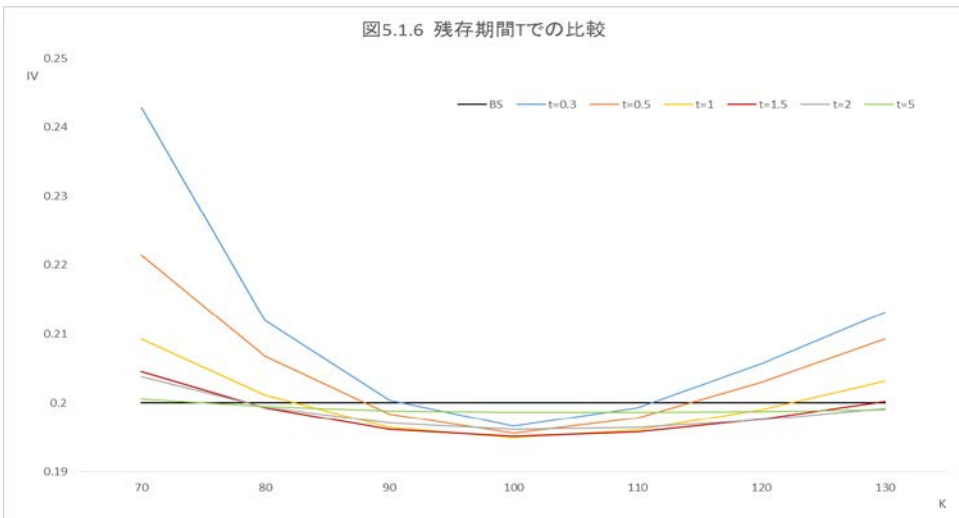
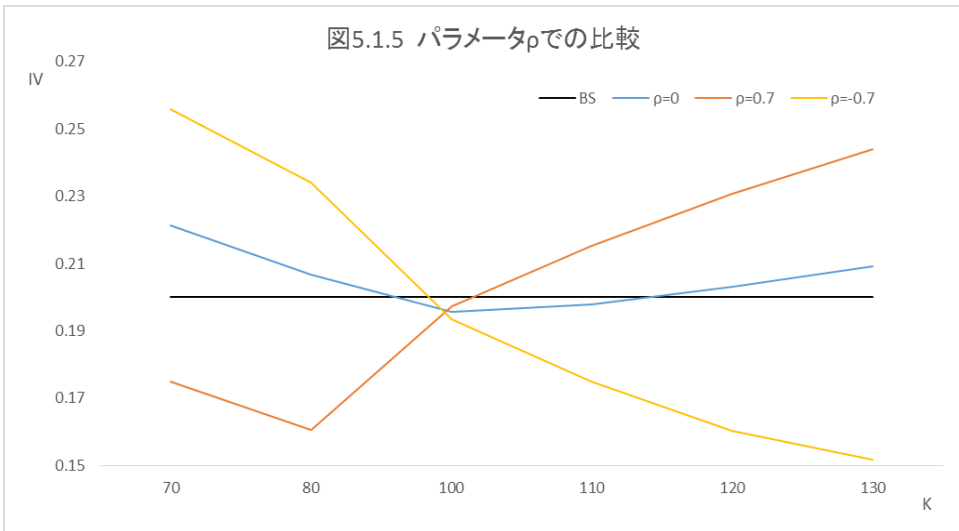
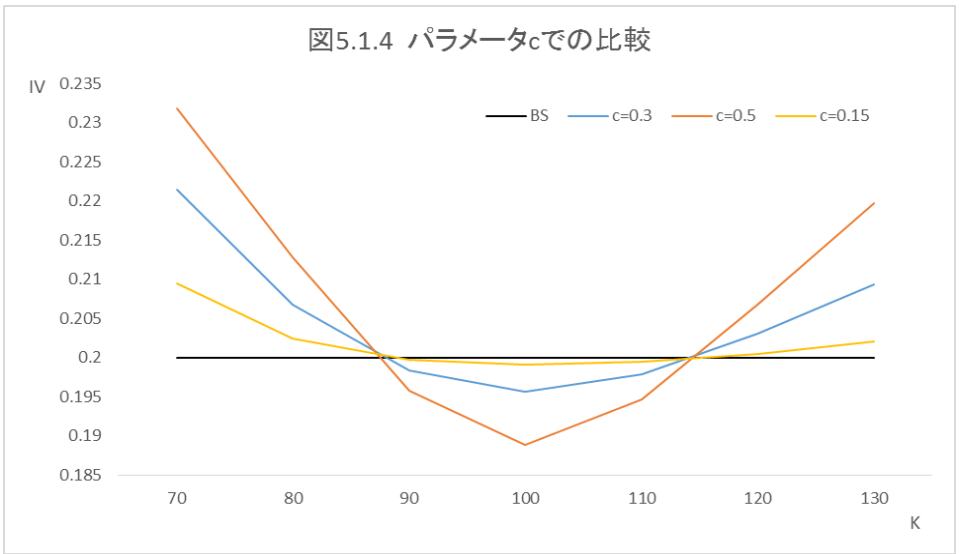
回帰水準	時点 T までのステップ数	モンテカルロ 試行回数	先物価格	行使価格
b	N	M	F	K
0.04	100	1000000	100	70~130

確率ボラティリティモデルの式(9)、(10)のうち時点 0 の株価 S_0 、残存期間 T、金利 r、標準偏差 σ 、時点 0 のボラティリティ V_0 、回帰水準 b については上記の値でそれぞれ固定する。またモンテカルロ・シミュレーションを用いてオプション価格を計算する際に必要となる時点 T までのステップ数 N、モンテカルロ試行回数 M、先物価格 F、行使価格 K も同様に上記の値で固定するが、平均回帰係数 a、確率過程 V_t のボラティリティ c、相関係数 ρ についてはベンチマークとしてそれぞれ 2、0.3、0 を与え、さらにこれらの値

を変化させることでボラティリティ・スマイルにどのような影響を及ぼすのかを観察する。

以上のパラメータ設定をもとにモンテカルロ・シミュレーションにてオプション価格を計算、そしてその価格が Black-Scholes モデルによるオプション価格に収束するようにボラティリティを変数とした最小二乗法でインプライド・ボラティリティの算出を試みた。そうして計算されたインプライド・ボラティリティを行使価格の関数として描いたグラフを以下図 5.1.2~5.1.5 として、また同時に、残存期間 T を変化させることで同グラフにどのような変化が表れるかを以下図 5.1.6 として提示する。なお、グラフの縦軸 IV はインプライド・ボラティリティ (図 5.1.1 の σ に対応する)、横軸 K は行使価格をそれぞれ指している。





これらのグラフをみると、いくつかの特徴が明らかになっている。以降、それぞれの図 5.1.3~5.1.6 に対応してグラフへの、①パラメータ a の変化による影響、②パラメータ c の変化による影響、③パラメータ ρ の変化による影響、④残存期間 T の変化による影響を示す。

<①パラメータ a の変化による影響>

- ・「パラメータ a が大きい」ほど、各行使価格のインプライド・ボラティリティは平均値 ($b = 0.2$) に近くなる。
- ・「パラメータ a が小さい」ほど、アットザマネー（以後、ATM）付近ではインプライド・ボラティリティは平均値から下に乖離し、高い行使価格と低い行使価格になるにつれてインプライド・ボラティリティは平均値から上に乖離する。

<②パラメータ c の変化による影響>

- ・「パラメータ c が大きい」ほど、ATM 付近ではインプライド・ボラティリティは平均値から下に乖離し、高い行使価格と低い行使価格になるにつれてインプライド・ボラティリティは平均値から上に乖離する。
- ・「パラメータ c が小さい」ほど、各行使価格のインプライド・ボラティリティは平均値に近くなる。

<③パラメータ ρ の変化による影響>

- ・「パラメータ ρ が大きい」ほど、インプライド・ボラティリティは ATM 付近で平均値をとるような、右上がりの形状となる。
- ・「パラメータ ρ が小さい」ほど、インプライド・ボラティリティは ATM 付近で平均値をとるような、右下がりの形状となる。

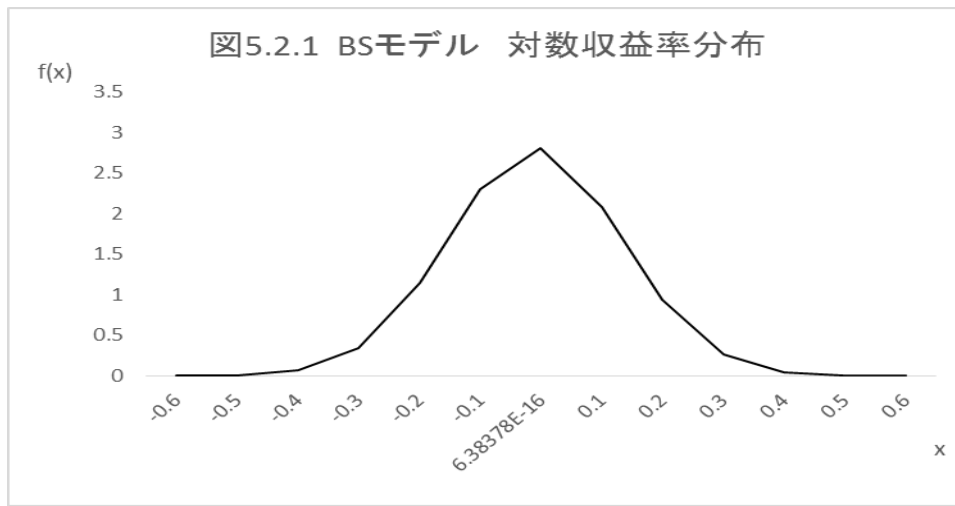
<④残存期間 T の変化による影響>

- ・「残存期間 T が長い」ほど、インプライド・ボラティリティ曲線の曲がり具合が緩やかになっていき、インプライド・ボラティリティは平均値に近くなる。
- ・「残存期間 T が短い」ほど、高い行使価格と低い行使価格になるにつれてインプライド・ボラティリティは平均値から上に乖離する。

以上が、パラメータの変化がボラティリティ・スマイルの形状に及ぼす影響だが、ここでは分析の結果を示すにとどめ、これらの分析結果からどのようなことが明らかになるのかは第6章で詳述することとする。

5-2 株式の対数収益率の分布の分析

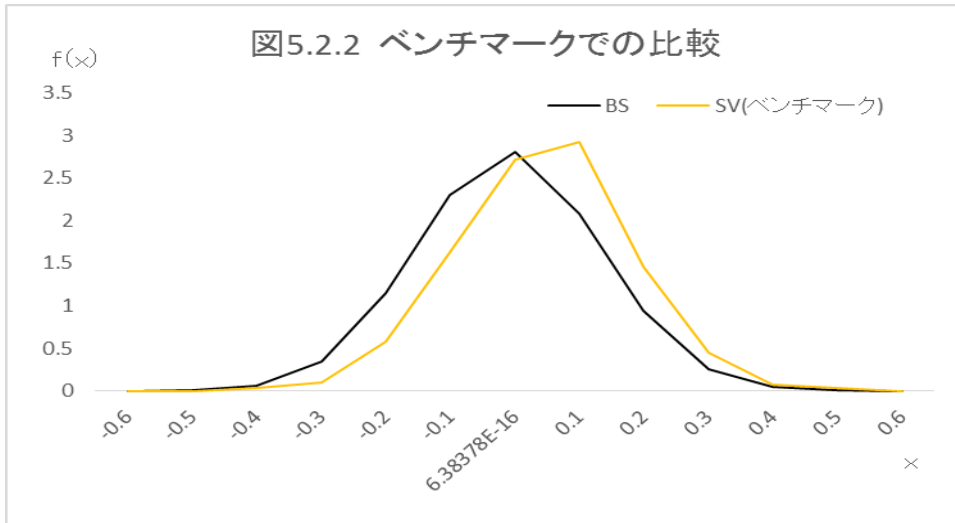
Black-Scholes モデルにおいて、株式の対数収益率は以下図 5.2.1 が示すような正規分布に従うと仮定されている。グラフの縦軸は確率密度関数 $f(x)$ 、横軸は Black-Scholes モデルの株式の対数収益率の実現値 x ($x = \ln(\frac{S_t}{S_0})$) をそれぞれ指している。また、表 5.2.1 に図 5.2.1 における平均、標準偏差、歪度、尖度の 4 つの統計データを示した。これらをもとに以降、確率ボラティリティモデルによる株式の対数収益率の分布との比較を行う。また同時に、図 5.1.2~5.1.5 で示したパラメータごとのボラティリティ・スマイルの形状と株式の対数収益率の分布が互いに整合的になっているのかも確認する。



(表 5.2.1 Black-Scholes モデルの場合の統計データ)

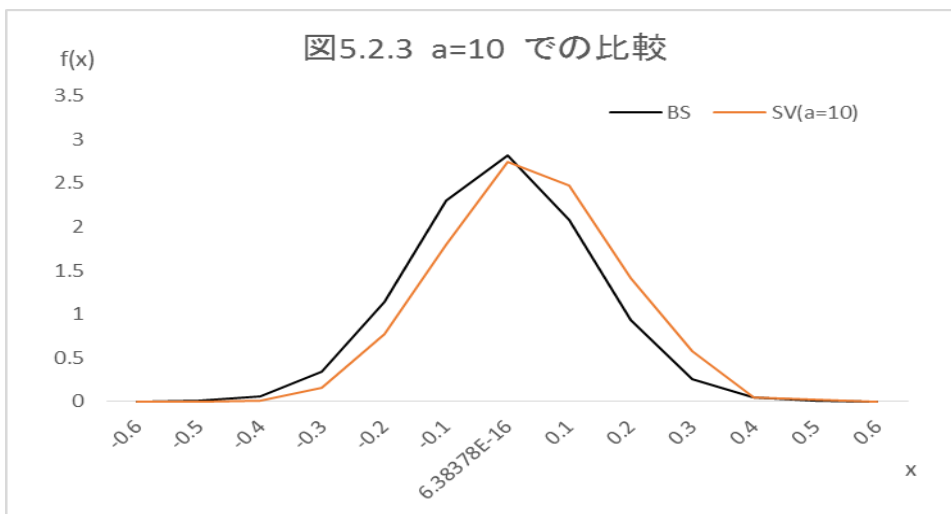
平均	-0.01	歪度	0.018852
標準偏差	0.141421	尖度	0.068862

確率ボラティリティモデルの場合、VBA を用いて株価のサンプルを計 1,000 個算出し、その対数収益率のヒストグラムから確率密度関数を描くことを試みる。そうして作成したグラフと、Black-Scholes モデルによる株式の対数収益率の分布のグラフを重ね合わせて比較したものが以下図 5.2.2~5.2.8、そしてそれぞれの場合の統計データを示したものが以下表 5.2.2~5.2.8 である。また同時に、残存期間 T を変化させることで同グラフにどのような変化が表れるかを以下図 5.2.9、表 5.2.9 として提示する。



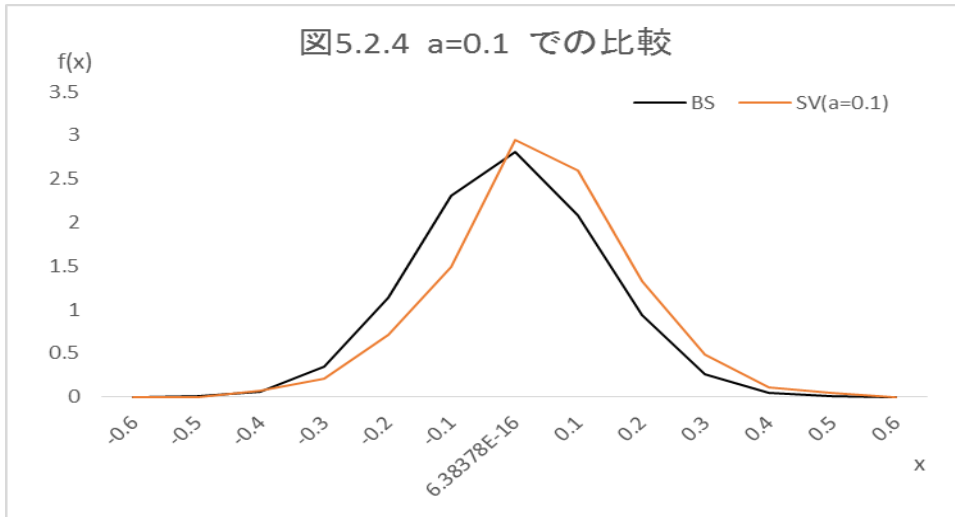
(表 5.2.2 確率ボラティリティモデル (ベンチマーク値) の場合の統計データ)

平均	-0.0107753	歪度	0.0033288
標準偏差	0.1343230	尖度	0.9879054



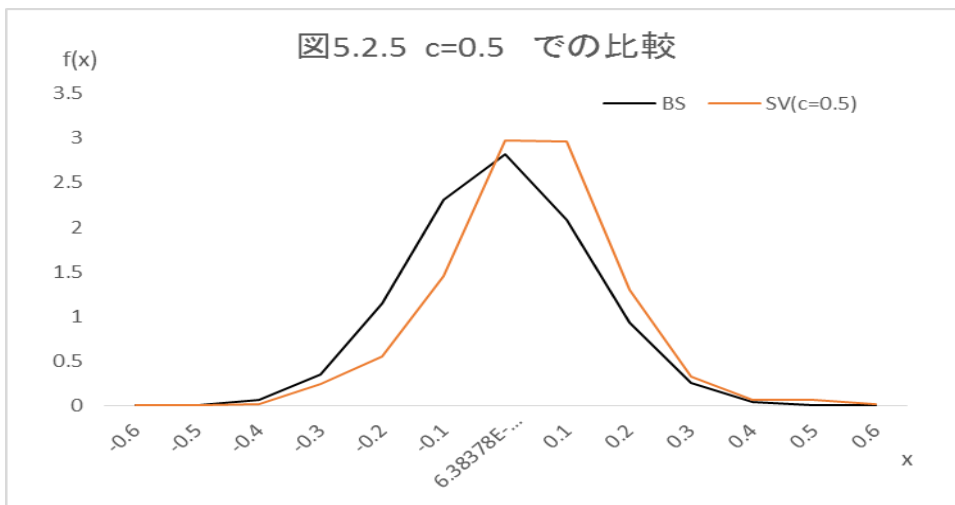
(表 5.2.3 確率ボラティリティモデル (a = 10) の場合の統計データ)

平均	-0.014640	歪度	-0.02298
標準偏差	0.139177	尖度	0.330772



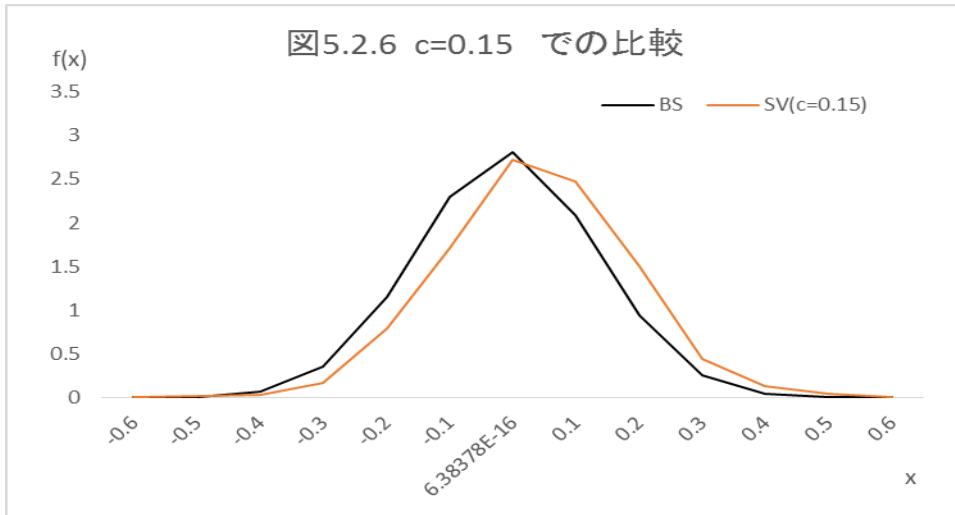
(表 5.2.4 確率ボラティリティモデル (a = 0.1) の場合の統計データ)

平均	-0.013975	歪度	0.062519
標準偏差	0.144921	尖度	1.159488



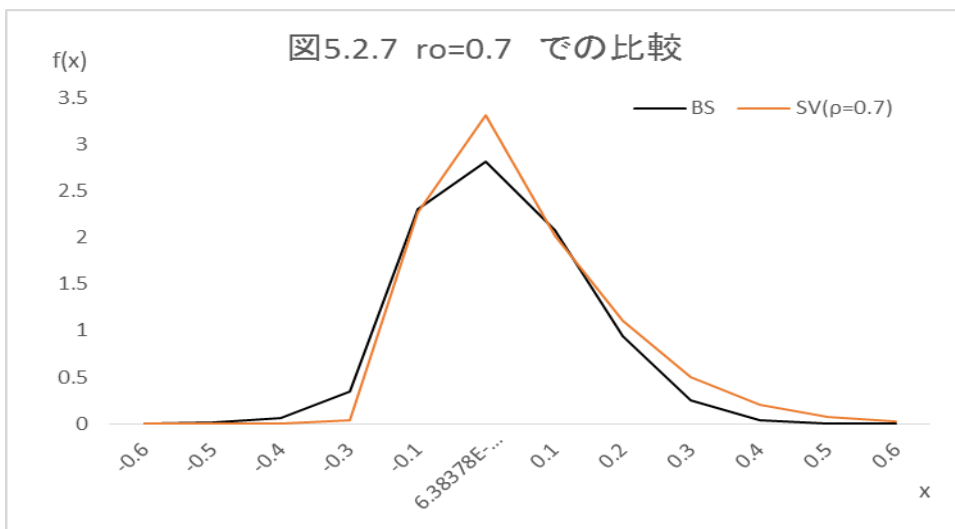
(表 5.2.5 確率ボラティリティモデル (c = 0.5) の場合の統計データ)

平均	-0.014798	歪度	0.143349
標準偏差	0.141955	尖度	1.503995



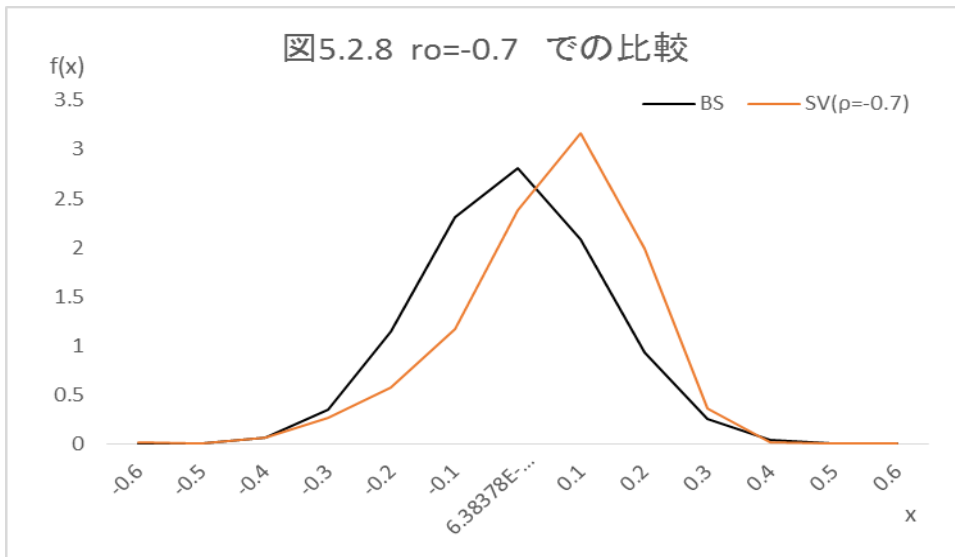
(表 5.2.6 確率ボラティリティモデル ($c = 0.15$) の場合の統計データ)

平均	-0.006785	歪度	0.049358
標準偏差	0.146674	尖度	0.121362



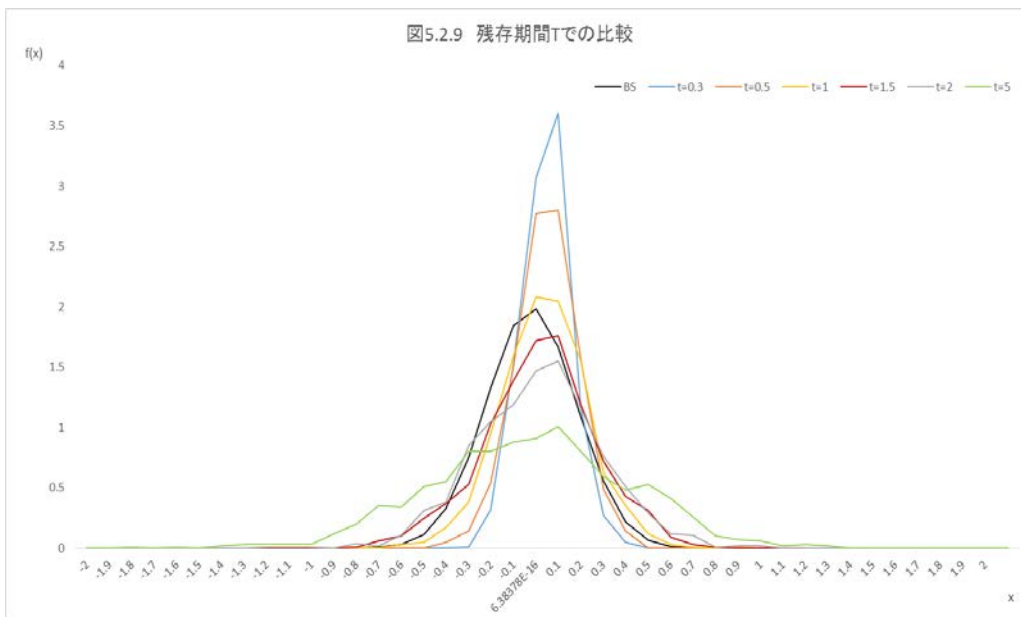
(表 5.2.7 確率ボラティリティモデル ($\rho = 0.7$) の場合の統計データ)

平均	-0.012687	歪度	0.879229
標準偏差	0.140537	尖度	1.228801



(表 5.2.8 確率ボラティリティモデル ($\rho = -0.7$) の場合の統計データ)

平均	-0.009757	歪度	-0.78001
標準偏差	0.142667	尖度	0.950532



(表 5.2.9 確率ボラティリティモデル (各残存期間 T) の場合の統計データ)

	平均	標準偏差	歪度	尖度
t = 0.3	-0.009133	0.116609	-0.03143	0.587251
t = 0.5	-0.005407	0.138742	-0.12594	0.410379
t = 1	-0.028511	0.205837	-0.07024	0.632188
t = 1.5	-0.020472	0.247967	-0.16911	0.444177
t = 2	-0.025958	0.281822	0.099712	0.246919
t = 5	-0.114801	0.439180	-0.14125	0.432407

これらグラフ及び表をみると、いくつかの特徴が明らかになっている。以降、それぞれの図 5.2.2~5.2.9、表 5.2.2~5.2.9 から観察された確率ボラティリティモデルの株式の対数収益率の分布への、①ベンチマーク値での Black-Scholes モデルとの比較、②パラメータ a の大小による影響、③パラメータ c の大小による影響、④パラメータ ρ の大小による影響、⑤残存期間 T の長短による影響を示す。

<①ベンチマーク値での Black-Scholes モデルとの比較>

→図 5.2.2、表 5.2.2

- ・Black-Scholes モデルと確率ボラティリティモデル (パラメータはベンチマーク値) の分布を比較すると、確率ボラティリティモデルは Black-Scholes モデルより尖度が大きいことがわかる。これは図 5.1.2 (SV (ベンチマーク)) と整合的である。

<②パラメータ a の大小による影響>

→図 5.2.3~5.2.4、表 5.2.3~5.2.4

- ・「パラメータ a が大きい」場合、Black-Scholes モデルと確率ボラティリティモデルの分布にほとんど違いはみられないことがわかる。これは図 5.1.3 (a = 10) と整合的である。
- ・「パラメータ a が小さい」場合、確率ボラティリティモデルは Black-Scholes モデルより尖度が大きいことがわかる。これは図 5.1.3 (a = 0.1) と整合的である。

<③パラメータ c の大小による影響>

→図 5.2.5~5.2.6、表 5.2.5~5.2.6

- ・「パラメータ c が大きい」場合、確率ボラティリティモデルは Black-Scholes モデルより尖度が大きいことがわかる。これは図 5.1.4 (c = 0.5) と整合的である。
- ・「パラメータ c が小さい」場合、Black-Scholes モデルと確率ボラティリティモデルの分布にほとんど違いはみられないことがわかる。これは図 5.1.4 (c = 0.15) と整合的である。

<④パラメータ ρ の大小による影響>

→図 5.2.7~5.2.8、表 5.2.7~5.2.8

- ・「パラメータ ρ が大きい」場合、確率ボラティリティモデルは Black-Scholes モデルより歪度と尖度が大きいことがわかる。これは図 5.1.5 ($\rho = 0.7$) と整合的である。
- ・「パラメータ ρ が小さい」場合、確率ボラティリティモデルは Black-Scholes モデルより歪度が小さく、尖度が大きいことがわかる。これは図 5.1.5 ($\rho = -0.7$) と整合的である。

<⑤残存期間 T の長短による影響>

→図 5.2.9、表 5.2.9

- ・「残存期間 T が長い」場合、確率ボラティリティモデルは Black-Scholes モデルより標準偏差が大きいことがわかる。
- ・「残存期間 T が短い」場合、確率ボラティリティモデルは Black-Scholes モデルより標準偏差が小さいことがわかる。

以上が、Black-Scholes モデルとパラメータごとの確率ボラティリティモデルによる株式の対数収益率の分布の比較だが、ここでは分析の結果を示すにとどめ、これらの分析結果からどのようなことが明らかになるのかは第6章で詳述することとする。

6. 分析結果と結論

本章では、第五章の分析結果を踏まえた上でどのようなことが言えるのかを、現実のマーケットで観測されていることと照らし合わせながら示す。また、まとめとして本論文における結論を提示する。

6-1 分析結果と現実のマーケットとの整合性

確率ボラティリティモデルの株式の対数収益率の分布がボラティリティ・スマイルの形状と整合的であることは第五章で示したが、本論文の目的である Black-Scholes モデルにかわる「より現実的なモデルの研究」という観点から、確率ボラティリティモデルのボラティリティ・スマイルの形状が現実のマーケットを正しく表わしているのかどうかを考察する。

一般に、ボラティリティ・スマイルの原因（補論1の6を参照）として、現実の市場には以下のような考え方がある。（なお、それぞれがどのような形状としてスマイルを形成するのも共に示す。）

- ①レバレッジ効果 (leverage effect) : ネガティブ・スキュー
- ②大暴落恐怖症 (crashophobia) : ネガティブ・スキュー
- ③ジャンプ (jump) : ボラティリティ・スマイル
- ④オーダーフロー (order flow) : ネガティブ・スキュー
- ⑤TOB (株式公開買い付け、take-over bid) : ポジティブ・スキュー

確率ボラティリティモデルの各パラメータ (a 、 c 、 ρ) の影響が、上記①～⑤のそれぞれの考え方に反映されているのかを、以降詳しくみていく。

まずパラメータ a についてだが、同パラメータの変化の影響を示している図 5.1.3 と整合的であるのは「③ジャンプ」であることがわかる。また表 5.2.3～5.2.4 より、パラメータ a の値が小さくなるほど収益率の分布の裾が厚くなる（すなわち、よりスマイルが鮮明になる）ので、パラメータ a は株価の上昇と下落の両方の状況に備えた投資家の将来の予想の度合いを反映するパラメータであるといえることができる。

次にパラメータ c についてだが、同パラメータの変化の影響を示している図 5.1.4 と整合的であるのは「③ジャンプ」であることがわかる。また表 5.2.5～5.2.6 より、パラメータ c の値が大きくなるほど収益率の分布の裾が厚くなる（すなわち、よりスマイルが鮮明になる）ので、パラメータ c は株価の上昇と下落の両方の状況に備えた投資家の将来の予想の度合いを反映するパラメータであるといえることができる。

最後にパラメータ ρ についてだが、すでに説明した2つのパラメータ a と c に比べ、 ρ はやや複雑であるので、 $\rho = 0.7$ （相関係数が正の値）の場合と、 $\rho = -0.7$ （相関係数が負の値）の場合にわけて考えていく。 $\rho = 0.7$ （相関係数が正の値）の場合、同パラメータの変化の影響を示している図 5.1.5 と整合的であるのは「⑤TOB」であることがわかる。また表 5.2.7 より歪度と尖度が正の値なので右側の裾が長く、厚くなる（すなわち、ポジティブ・スキューを形成する）ので、パラメータ ρ は株価の上昇に備えた投資家の予想の度合いを反映するパラメータであるといえることができる。 $\rho = -0.7$ （相関係数が負の値）の場合、同パラメータの変化の影響を示している図 5.1.5 と整合的であるのは「①レバレッジ効果」、「②大暴落恐怖症」、「④オーダーフロー」であることがわかる。また表 5.2.8 より尖度が正の値、歪度が負の値なので左側の裾が長く、厚くなる（すなわち、ネガティブ・スキューを形成する）ので、パラメータ ρ は株価の下落に備えた投資家の予想の度合いを反映するパラメータであるといえることができる。

6-2 結論

本研究において明らかになったことは次の2点である。それは、①確率ボラティリティモデルは Black-Scholes モデルより株式の対数収益率の分布の裾が厚い（ボラティリティ・スマイル、スキューと整合的）、②確率ボラティリティモデルのパラメータ (a 、 c 、 ρ) を変化させることで、投資家のマーケットに対する予想をボラティリティ・スマイル

(ボラティリティ・スキュー)として反映することができる、である。まず①についてだが、実務の世界において、トレーダーは任意の将来時点の株価の確率分布を対数正規分布より左の裾が厚く、右の裾が薄いものと仮定している。これは、株価とボラティリティには負の相関があること(すなわち株式を原資産とするオプションのボラティリティ・スマイルは右下がりになる傾向があるということ)を考慮したものである。このような逆相関を考慮した株式の対数収益率およびボラティリティ・スマイルは、確率ボラティリティのパラメータ ρ の符号を負の値にすることで再現できることが第5章の数値研究で示されたので、少なくとも株式を原資産とするオプションプライシングでは、確率ボラティリティモデルの方が **Black-Scholes** モデルよりも現実的なマーケットプライスを表現できるといえる。次に②についてだが、現実のマーケットで観察されているようなボラティリティ・スマイルはパラメータ a と c 、ポジティブ・スキュー、ネガティブ・スキューはパラメータ ρ を任意の値に変化させることでその度合いまで表現できることが第5章で示されたので、株式オプションのみならずボラティリティ・スマイルが顕著な外国通貨オプションのプライシングなどでも確率ボラティリティモデルを用いることができる。この点において、確率ボラティリティモデルの方が **Black-Scholes** モデルよりも幅広い原資産に対応できる柔軟なモデルであるといえる。

以上の点を踏まえることで本論文において、確率ボラティリティモデルは **Black-Scholes** モデルよりも現実的であり実用的なモデルであるという結論を導くことができる。本研究では確率ボラティリティモデルのパラメータ a 、 c 、 ρ を変化させることによる影響を検証したが、ベンチマークとして与えた値からのパラメータの変化のサンプルパターンを増やすことで、より深い考察ができると思われる。また第4章で数式を用いて示した確率ボラティリティモデルの微分方程式や確率ボラティリティモデルのボラティリティリスクプレミアムの存在を、株式の対数収益率の分布やボラティリティ・スマイルの数値検証と関連付けて議論し、何らかの示唆を与えることができればさらに意義のある研究になると考えられる。これらが本論文における課題であり、またこれらを考慮しさらに多様な視点を加えることでより洗練された結論を提示することができるだろう。

参考文献

- Black, F., and M. Scholes, "The Valuation of Options and Corporate Liabilities," Journal of Political Economy, 81, 1973, pp. 637-654.
- Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," Journal of Econometrics, 31, 1986, pp. 307-327.
- Engle, R. F., "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," Econometrica, 50, 1982, pp. 987-1006.
- Heston, Steven L., "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility With Applications to Bond and Currency Options," Review of Financial Studies, 6(2), 1993, pp. 327-343.
- Merton, R. C. "Theory of Rational Option Pricing," Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 1973, pp. 141-183
- ジョン ハル 『フィナンシャルエンジニアリング 第7版』 三菱 UFJ 証券市場商品本部訳、社団法人金融財政事情研究会、2009年
- 宮崎浩一 『オプション市場分析への招待』 森平爽一郎他編集、朝倉書店、2009年
- 佐藤茂 『オプション取引入門 基本理論と戦略』 ダイヤモンド社、2013年

補論 1

1 伊藤過程について

伊藤過程とは、以下のように定義される、一般化されたウィナー過程である。

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

この式において a はドリフト率、 b は分散率と呼ばれるものである。また、式(1)において、ドリフト率と分散率はそれぞれ μS 、 $\sigma^2 S^2$ となる。

2 Black-Scholes モデルを前提とした時点 T の株価 S_T の導出

ジョンハル (2009) の第 13 章の株価の対数正規性の考え方をもとに、時点 T の株価 S_T の導出を試みる。

関数 $G(S,t)$ が、 $dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)$ で与えられているとする。

$G = \ln S$ とおくと、 $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$ 、 $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ 、 $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ が成り立つので、

株価過程 ($dS = \mu S dt + \sigma S dz$) と伊藤のレナマ ($dG = (\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$) が満

たす式 $dG = (\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz$ より、 $G(S, t)$ は

$$dG = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt + \sigma dz$$

と表される。

ここで $dG = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt + \sigma dz$ を積分の形で表すと、

$$G_{t+dt} - G_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt + \sigma(z_{t+dt} - z_t)$$

となる。この式に、 $t = 0, dt, 2dt, \dots, t-dt$ を順に代入していくと、

$$(t = 0 \text{ のとき}) \quad G_{dt} - G_0 = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt + \sigma(z_{dt} - z_0) \quad ,$$

$$(t = dt \text{ のとき}) \quad G_{2dt} - G_{dt} = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt + \sigma(z_{2dt} - z_{dt}) \quad ,$$

: :

$$(t = t-dt \text{ のとき}) \quad G_t - G_{t-dt} = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt + \sigma(z_t - z_{t-dt})$$

となる。

これらをすべて足し合わせると、 $G_t - G_0 = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) t + \sigma z_t$ になり、また $S_T = e^{G_T}$ を用いて

$$\ln e^{G_T} - \ln e^{G_0} = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) T + \sigma z_T$$

$$\frac{S_T}{S_0} = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) T + \sigma z_T}$$

$$S_T = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) T + \sigma z_T}$$

が得られる。

また、この式の両辺の期待値をとり、時点 0 から時点 T までの株式の対数収益率 $\ln(\frac{S_T}{S_0})$

が $\ln(\frac{S_T}{S_0}) \sim \phi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) T, \sigma^2 T]$ となることを踏まえると、

$$\begin{aligned} E[S_T] &= S_0 E[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) T + \sigma z_T}] \\ &= S_0 \exp[(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) T + \frac{\sigma^2 T}{2}] \end{aligned}$$

$$= S_0 e^{\mu T}$$

を導くことができる。この式とフォワード理論価格式を比較すれば、 $\mu = r$ と置き換えることの合理性がわかる。

※フォワード価格理論のフォワード価格 F_t では、 $F_t = S_t e^{r(T-t)}$ が成り立つが、これは原資産価格 S の将来時点 T での価格 S_T は、価格 S を期間 T の間無リスク金利 r で複利運用したときの価格 $S_0 e^{rT}$ に等しくなるということを示している。

3 Black-Scholes 微分方程式の導出

Black-Scholes 微分方程式の導出を、ジョンハル (2009) の第 13 章に従って試みる。

株価が株価過程 ($dS = \mu S dt + \sigma S dz$) に従うと仮定し、伊藤のレナマを用いると、原資産価格が S で与えられるコールオプションの価格 $f(S,t)$ は、

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

に従う。

ここで、コールオプション f と原資産である株式 S に含まれるウィナー過程は同一であることを利用して、デルタヘッジ法による無リスクポートフォリオの作成を行う。

まず、コールオプション f を -1 単位、株式 S を $+\frac{\partial f}{\partial S}$ 単位購入することを考えると、ポートフォリオの価値 Π は

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

であり、微小時間 Δt でのこのポートフォリオの価値の変化 $\Delta \Pi$ は

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

となる。さらに、この式に株価過程とコールオプションの価格が従う 2 式の離散型を代入すると、

$$\Delta \Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial S} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t$$

になる。この式の中では確率的な振る舞いをするウィナー過程の項が消去されているので、微小時間 Δt の間無リスクであるといえる。

また Black-Scholes 微分方程式の導出における仮定より、ポートフォリオの瞬間的な収益率 $\frac{\Delta \Pi}{\Pi}$ は無リスク金利 r に等しくなるので、

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t$$

が成り立つ。すなわち、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf$$

が得られる。

4 ε_1 と $\rho\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2$ の相関係数について

ε_1 と $\rho\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2$ の相関係数が ρ になることを以下に示す。

$X = \varepsilon_1$, $Y = \rho\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim N(0,1)$ で互いに独立とする

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[\varepsilon_1]} = 1$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\text{Var}[\rho\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2]} = \sqrt{\rho^2 \text{Var}[\varepsilon_1] + (\sqrt{1 - \rho^2})^2 \text{Var}[\varepsilon_2]} = 1$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$= \frac{\text{E}[XY] - \text{E}[X]\text{E}[Y]}{1 \times 1}$$

$$= \text{E}[\rho\varepsilon_1^2 + \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_1\varepsilon_2] - 0$$

$$= \rho(\text{Var}[\varepsilon_1] + \text{E}[\varepsilon_1]^2) + \sqrt{1 - \rho^2}\text{E}[\varepsilon_1]\text{E}[\varepsilon_2]$$

$$= \rho$$

5 2次元の伊藤の公式

ボラティリティが CIR 過程に従う場合の2次元の伊藤の公式を、宮崎浩一（2009）の付録6を参考に以下に示す。

$X(t)$ と $Y(t)$ を伊藤過程とすると、2次元の伊藤の公式は、

$$df(t, X, Y) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial Y} dY + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} dXdX + \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} dXdY + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} dYdY$$

となる。

ここで、 $F_t = F(S_t, V_t, t)$ において伊藤過程 $X(t)$ と $Y(t)$ にそれぞれ

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1$$

$$dV_t = a(b - V_t) dt + c\sqrt{V_t} \rho dW_t^1 + c\sqrt{V_t} \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2$$

が対応することを踏まえると、

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dSdS + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} dSdV + \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} dVdV$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} \mu S dt + \frac{\partial F}{\partial S} \sqrt{V} S dW_t^1 + \frac{\partial F}{\partial V} a(b - V) dt + \frac{\partial F}{\partial V} c\sqrt{V} \rho dW_t^1$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial V} c\sqrt{V} \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (\sqrt{V} S)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} V S \rho c + \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} c^2 V \rho^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} c^2 V (1 - \rho^2) dt$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S} \mu S + \frac{\partial F}{\partial V} a(b-V) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (\sqrt{V} S)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial V} V S c \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} c^2 V \right) dt$$

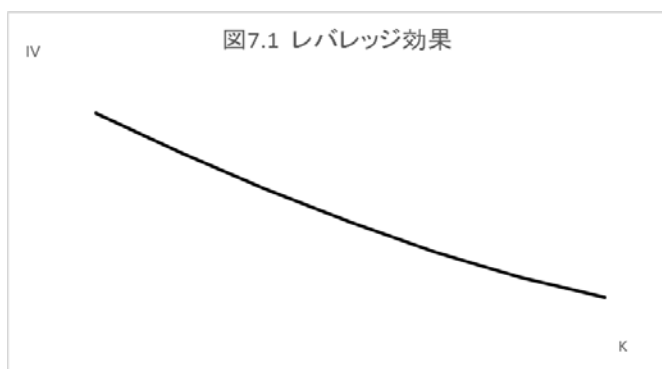
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial S} \sqrt{V} S + \frac{\partial F}{\partial V} c \sqrt{V} \rho \right) dW_t^1 + \frac{\partial F}{\partial V} c \sqrt{V} \sqrt{1-\rho^2} dW_t^2$$

となる。この式の両辺を F で割ったものが式(11)~(14)である。

6 ボラティリティ・スマイルの原因

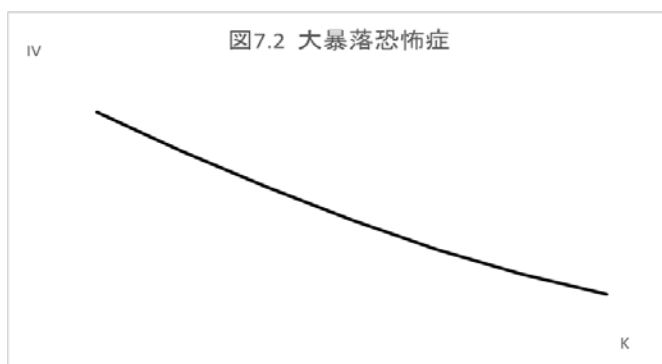
佐藤茂 (2013) の 6 章によれば、現実のマーケットにおいて観察されているボラティリティ・スマイルの形状とその原因には、以下のようなものが存在している。なお、図 7.1~7.5 においてグラフの縦軸 IV はインプライド・ボラティリティ、横軸 K は行使価格をそれぞれ示している。

(レバレッジ効果)



- ・企業の株価が下がると、総資本に占める資本の割合が減少し、負債の割合が増加する。これは企業が高レバレッジ状態になったことを意味しており、リスクを表わすボラティリティは高くなる。同様に、株価が上昇した場合は低レバレッジ状態になり、ボラティリティは低くなる。これは図 7.1 と整合的である。

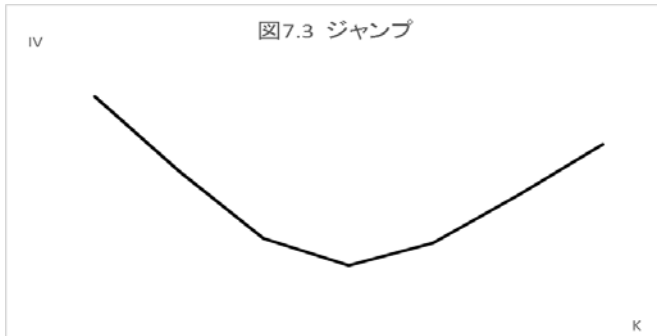
(大暴落恐怖症)



- ・株価は大きく上昇するよりも、大きく下落する場合のほうが多い。そして急激な株価

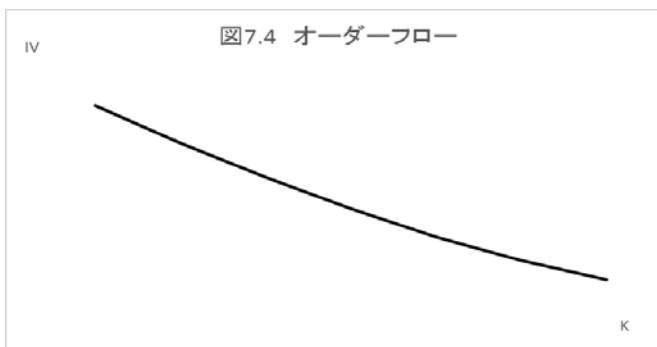
の下落に備えて、投資家は低い行使価格のプットオプションを購入する動きを強め、低い行使価格のオプションのボラティリティは高くなる（この傾向は1987年10月に株式市場が大暴落してから観測されるようになった）。これは図7.2と整合的である。

(ジャンプ)



- 現実のマーケットでは、大きなニュースに反応して上昇・下落いずれかの方向に株価が瞬時にジャンプすることがある。そしてその結果、株式の対数収益率の分布の裾は厚くなる。これは図7.3と整合的である。

(オーダーフロー)



- 一般的に投資家は株式をロングしている。このような投資家は高い行使価格のコールオプションを売ることでリスクを限定し、プレミアムを稼ぐことができる。また、保有株式の下落に備えて低い行使価格のプットオプションを買うことで、リスクヘッジをすることができる。投資家のこのような行動から、低い行使価格のオプションのボラティリティは高くなり、高い行使価格のオプションのボラティリティは低くなる。これは図7.4と整合的である。

(TOB)



- 一般的に企業が TOB によって他企業の株式を購入するとき、TOB 価格は現在の株価よりも高く設定される。これを見越して、投資家は高い行使価格のコールオプションを購入して利ザヤを稼ごうとする。結果、高い行使価格のオプションのボラティリティは上昇する。これは図 7.5 と整合的である。

補論 2

1 VBA による Black-Scholes モデルの株価計算

Function S_BS(S_0, T, R, Sigma, N)

' (インプット)

'S_0: 現在の株価

'T: 将来時点

'R: 金利

'Sigma: ボラティリティ

'N: 将来時点までのステップ数

' (アウトプット)

'モンテカルロ法による将来時点の BS 株価

'プログラム上で使う変数の定義

Dim i As Long '「インデックス i」は整数

Dim dt As Double '「時間の刻み幅 dt」は実数

Dim e As Double '「正規乱数 e」は実数

Dim S As Double '「期中の株価 S」は実数

dt = T / N '時間の刻み幅 dt の設定

S = S_0 '株価の初期化

For i = 1 To N '時間を N ステップ進める

 e = WorksheetFunction.NormInv(Rnd, 0, 1) '正規乱数の生成

 S = S + R * S * dt + Sigma * S * e * Sqr(dt) '株価パスの生成

Next i

S_BS = S 'T 年後の株価のアウトプット

End Function

2 VBA による確率ボラティリティモデルの株価計算

Function S_SV(S_0, T, R, a, b, c, V_0, N, ro)

'(インプット)

'S_0:現在の株価

'T:将来時点

'R:金利

'a:パラメータ a

'b:パラメータ b

'c:パラメータ c

'V_0:現在の分散

'N:将来時点までのステップ数

'ro:相関係数

'(アウトプット)

'SV を前提とした株価の計算

'変数の定義

Dim i As Long 'i は整数

Dim j As Long 'j は整数

Dim dt As Double '時刻の刻み幅 dt は実数

Dim e1 As Double '正規乱数 e1 は実数

Dim e2 As Double '正規乱数 e2 は実数

Dim S As Double '期中の株価 S は実数

Dim V As Double '期中の分散 V は実数

```

dt = T / N '時間の刻み幅 dt の設定
S = S_0 '株価の初期化
V = V_0 '分散の初期化

For i = 1 To N '時間を N ステップ進める
    e1 = WorksheetFunction.NormInv(Rnd, 0, 1) '正規乱数の生成
    e2 = WorksheetFunction.NormInv(Rnd, 0, 1) '正規乱数の生成
    S = S + R * S * dt + Sqr(V) * S * e1 * Sqr(dt) '株価パスの生成
    V = WorksheetFunction.Max(0, V + a * (b - V) * dt + c * Sqr(V) * (ro * e1 +
Sqr(1 - ro * ro) * e2) * Sqr(dt)) '分散パスの生成
Next i

```

S_SV = S 'T年後の株価のアウトプット

End Function

3 Rによる確率ボラティリティモデルを前提としたコールオプションの価格計算

```

call_SV <- function() {
#インプット
#S_0:現在の株価
#T:将来時点
#R:金利
#a:パラメータ a
#b:パラメータ b
#c:パラメータ c
#V_0:現在の分散
#N:将来時点までのステップ数
#ro:相関係数
#M:モンテカルロの試行回数
#K:行使価格

S_0 <- 100
T <- 0.5
R <- 0
a <- 2

```

```

b <- 0.04
c <- 0.3
V_0 <- 0.04
N <- 100
ro <- 0
M <- 1000000
K <- c(70,80,90,100,110,120,130)

#(アウトプット)
#SV モデルによる株価を前提とした Call 価格

dt <- T/N #時間の刻み幅 dt の設定
payoff_sum <- numeric(length(K)) #ペイオフの和の初期化

for(m in 1:M) { #M 回の試行を実施
  S <- S_0 #株価の初期化
  V <- V_0 #分散の初期化
  for(n in 1:N) { #時間を N ステップ進める
    e1 <- rnorm(1) #正規乱数の生成
    e2 <- rnorm(1) #正規乱数の生成
    S <- S+R*S*dt+sqrt(V)*S*e1*sqrt(dt) #株価パスの生成
    V <- pmax(0,V+a*(b-V)*dt+c*sqrt(V)*(ro*e1+sqrt(1-ro*ro)*e2)*sqrt(dt))
#分散パスの生成
  }

  payoff_sum <- payoff_sum+pmax(S-K,0) #コールのペイオフの和の計算
}

return((1/M)*exp(-R*T)*payoff_sum) #コールオプション価格の計算

```