

2023 年度卒業レポート「パフォーマンス評価」

法政大学 経営学部 経営戦略学科 鈴木修介

法政大学 経営学部 経営学科 樋口太郎

法政大学 経営学部 経営戦略学科 岡田奈桜

【リード文】

現在は 2019 年の 10 月である。Z 年金基金では、2020～2024 年度の 5 年間の日本株のマネージャー・ストラクチャーの検討を行っている。検討の過程で同基金は、マネージャー・ストラクチャーの決定のために、資産運用会社のパフォーマンス分析を行った。なお、同基金では日本株のベンチマークとして配当込み TOPIX(以下 TOPIX と略す)を用いている。検討の結果、同基金はアクティブ運用を行う A 社、B 社、C 社、およびパッシブ(インデックス)運用を行う D 社に運用委託することにした。なお、同基金は以下の効用関数 $U(R_Z)$ を最大化するように、日本株ポートフォリオ全体に対する各社のファンドの配分比率を決定する方針である。効用関数は $U(R_Z) = E(R_Z) - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(R_Z)$ で表される。 R_Z は Z 年金基金の日本株式ポートフォリオ全体のリターン、 $E(R_Z)$ は Z 年金基金の日本株式ポートフォリオ全体のリターンの期待値、 $\sigma^2(R_Z)$ は Z 年金基金の日本株式ポートフォリオ全体のリターンの分散、 γ は Z 年金基金のリスク回避度を表している。Z 年金基金は、A～D 社が運用する各ファンド A～D と TOPIX について定量的な分析を行い、図表 1～4 の結果を得た。

目次

1. リード文の解説
2. 問 1
3. 問 2
4. 問 3
5. 問 4
6. 問 5

参考文献

補論

- ① 効用関数
- ② アクティブリターン・トラッキングエラー・インフォメーションレシオ・決定係数
- ③ 投資スタイル
- ④ ファーマフレンチの3ファクターモデル

1. リード文解説

用語について

・マネージャー・ストラクチャー

資産運用をどのような種類の運用機関(マネージャー)に、どのように配分するのかという構成(ストラクチャー)の決定、およびそのプロセスをいう。

・ベンチマーク

その投資信託が運用する際に目標とする基準のこと。通常、指数はその市場の平均と見なされるので、その指数に対して上回る運用成績であれば、ファンドマネージャーの腕がよかったと言える。

・TOPIX

東証株価指数と呼ばれ、1968年1月4日に記録された時価総額(株価×発行済み株式数)を基準指数100ポイントとし、この基準指数を用いて算出される。表示単位はポイント。

・アクティブ運用

ベンチマークを上回るリターンを目指す。

・パッシブ運用

ベンチマークと同等のリターンを目指す。

リード文を要約すると、Z年金基金が2020年度からの5年間にわたってアクティブ運用を行うA社、B社、C社、パッシブ運用を行うD社に運用委託を行う。TOPIXをベンチマークとして以下の効用関数を最大化するようなポートフォリオ全体に対する各社のファンド配分比率を決定する方針である。

$$U(R_Z) = E(R_Z) - \frac{1}{2} \gamma \sigma^2(R_Z)$$

ここで、

R_Z : Z年金基金の日本株ポートフォリオ全体のリターン

$E(R_Z)$: Z年金基金の日本株ポートフォリオ全体のリターンの期待値

$\sigma^2(R_Z)$: Z年金基金の日本株ポートフォリオ全体のリターンの分散

γ : Z年金基金のリスク回避度(投資家のリスクをとることに対するペナルティーの度合い)

とする。

2. 問1

「Z年金基金は、過去にアクティブ運用で優れた運用パフォーマンスをあげたA社に、2015年度からアクティブ運用を委託してきた。ファンドAについて、2009年4月～2014年3月のインフォメーション・レシオ(IR)(年率)はいくらですか。」

図表1 ファンドAとTOPIXの過去のパフォーマンスとリスク特性

	サンプル期間	平均 リターン	標準 偏差	α_1	β	$t(\alpha_1)$	$t(\beta)$	R^2	TE
ファンドA	2009.4~2014.3	1.20	4.61	0.18	1.03	0.71	16.46	0.82	1.94
	2014.4~2019.3	0.18	3.97	-0.35	0.96	-1.22	11.51	0.69	2.19
TOPIX	2009.4~2014.3	0.99	4.07	-	-	-	-	-	-
	2014.4~2019.3	0.56	3.46	-	-	-	-	-	-

(注) 平均リターン、標準偏差、 α_1 、TEは月率%

α_1 、 β は、以下のマーケットモデルの推定によって得られた値で、推定にはサンプル期間の月次データ(各60ヵ月)を用いた。

$$R_p = \alpha_{1p} + \beta_p R_{TOPIX} + \varepsilon_{1p}$$

ただし、

R_p 、 R_{TOPIX} ：それぞれリスクフリー・レートに対するファンド p およびTOPIXの超過リターン

ε_{1p} ：残差項

$t(\alpha_1)$ 、 $t(\beta)$ ：推定値 α_1 、 β の t 値

R^2 ：マーケット・モデルの推定結果の決定係数

TE：TOPIXに対する超過リターンの標準偏差(トラッキング・エラー)

図表1は、ファンドAとTOPIXの過去の平均リターンや標準偏差、過去60か月のデータから推定したマーケットモデルの α 、 β とそれらの t 値、決定係数、トラッキングエラーを表したものである。これらの指標については補論で詳しく解説する。

問1で問われているのは、ファンドAのインフォメーションレシオである。この指標についても補論で詳しく解説するが、インフォメーションレシオとは、ベンチマークからの超過リターンを得るためにどれだけのリスクをとったかを示す指標で、アクティブリターン(ポートフォリオのリターンとベンチマークのリターンの差)をトラッキングエラーの値で除することで求められる。ファンドAのアクティブリターンは、2009年4月~2014年3月の期間で問われているため、

$$\begin{aligned} \text{ファンドAのアクティブリターン} &= \text{ファンドAの平均リターン} - \text{TOPIXのリターン} \\ &= 0.012 - 0.0099 \\ &= 0.0021 \end{aligned}$$

となる。

次にファンドAのトラッキングエラーは、図表1から0.0194と分かる。しかし、これらの図表1に示された数値は月率で表されている一方、問題では年率で問われている。そのため、アクティブリターンとトラッキングエラーを年率換算する必要がある。トラッキングエラーなどのリスクを換算するときには、期間 n 倍するのではなく、 \sqrt{n} 倍することに注意して計算すると、年率換算したアクティブリターンとトラッキングエラーは、
アクティブリターン(年率) = 0.0021×12

トラッキングエラー（年率） $=0.0194 \times \sqrt{12}$

となる。よって、求めたいインフォメーションレシオの値は、

$$IR = \frac{0.0021 \times 12}{0.0194 \times \sqrt{12}} = 0.3749 \dots \doteq 0.37$$

となる。

3. 問2

「図表2をもとにして、アクティブ・ファンドA,B およびCの運用スタイルの特徴(グロース/バリュー及び大型・小型)を判断しなさい。」という問いである。

図表2 各ファンドのIRとファーマフレンチの3ファクター・モデルの推定結果

	サンプル期間	IR	α_2	β_{MKT}	β_{SMB}	β_{HML}	$t(\alpha_2)$	R^2
ファンドA	2009.4~2014.3	問1	0.41	1.00	-0.33	0.42	2.33	0.92
	2014.4~2019.3	-0.59	-0.16	0.99	-0.27	0.55	-1.08	0.92
ファンドB	2009.4~2014.3	0.38	0.21	0.99	-0.14	-0.48	1.06	0.89
	2014.4~2019.3	0.27	0.10	1.03	-0.27	-0.60	0.54	0.89
ファンドC	2009.4~2014.3	0.93	0.43	1.09	0.54	-0.80	1.71	0.88
	2014.4~2019.3	0.64	0.28	0.94	0.61	-0.67	1.35	0.89
ファンドD	2009.4~2014.3	-0.51	0.00	1.00	0.00	0.00	-0.99	1.00
	2014.4~2019.3	0.29	0.00	1.00	0.00	0.00	0.36	1.00

図表2は2009年4月~2014年3月、2014年4月~2019年3月における各ファンドのIRとファーマフレンチの3ファクターモデルの推定結果を示している。左から順にIR(インフォメーションレシオ)、 α ファンドマネージャーの運用スキル、 $\beta_{MKT}, \beta_{SMB}, \beta_{HML}$ は3つのファクターそれぞれに対するエクスポージャー、 t は α の t 値、つまり α が信頼できる値であるかを判断する指標であり絶対値が2以上であると信頼に足ると判断できる、 R^2 は決定係数を表す。ファンドAの β_{SMB} は両期間ともにマイナスの値であるので大型株を購入し、小型株を売却している。 β_{HML} は両期間ともプラスの値を示しているので、割安株を購入し、割高株を売却している。同様に、ファンドBの β_{SMB} は両期間ともにマイナスの値であるので大型株を購入し、小型株を売却している。 β_{HML} は両期間ともマイナスの値を示しているので、割高株を購入し、割安株を売却していることが読み取れる。ファンドCの β_{SMB} は両期間ともにプラスの値であるので小型株を購入し、大型株を売却している。 β_{HML} は両期間ともマイナスの値を示しているので、割高株を購入し、割安株を売却している。よって解答は、Aはバリュー株・大型株、Bはグロース株、大型株、Cはグロース株・小型株となる。

4. 問3

問3は「2014年4月～2019年3月のファンドAのIRは、2009年4月～2014年3月と比較して大幅に悪化し、マイナスとなっている。その要因を、図表2と図表3に示された数値から推察し、2つ挙げて説明しなさい。」という問いである。ファンドAのIRが問1で求めた0.37から-0.59に低下した理由が問われている。

1つ目の解答はファンドマネージャーが十分なパフォーマンスを発揮できなかったことである。図表2のファンドマネージャーの運用スキルを表す α を見ると、0.41から-0.16となっている。この値の信頼性を示すt値は、0.41のt値は2.33あり、 $\alpha=0$ である可能性が棄却され信頼に足る。一方で-0.16のt値は-1.08で絶対値2以上ではないため $\alpha=0$ である可能性が棄却できないが、例え0であっても-0.16であってもプラスではないため、ファンドマネージャーが十分なパフォーマンスを発揮できなかったと言える。

2つ目の解答はリターンが出る投資方法と反対の運用をしていることである。

図表3 ファーマ=フレンチの3ファクターの平均リターンと標準偏差

サンプル期間		f_{Mkt}	f_{SMB}	f_{HML}
2009.4～2014.3	平均リターン	0.989	0.444	-0.120
	標準偏差	4.071	2.449	2.380
2014.4～2019.3	平均リターン	0.550	0.318	-0.213
	標準偏差	3.464	2.099	2.762

図表3は2009年4月～2014年3月、2014年4月～2019年3月におけるファーマフレンチの3ファクターの平均リターンと標準偏差を表したものである。図表3から f_{SMB} は両期間ともプラスの値であるため小型株の平均リターンが高いこと、 f_{HML} は両期間ともマイナスの値であることから割高株の平均リターンが高いことが読み取れる。つまり、小型株・グロース株基調である。 f_{SMB} を両期間で比較すると0.444から0.318に変化しており、これは小型株基調が弱まっていることを意味する。つまり、小型株の保有割合を減少させればリターンは増加したが、実際にはファンドAは図表2の β_{SMB} が-0.33から-0.27に変化していることから小型株の保有割合を増加させてしまっている。さらに、 f_{HML} を両期間で比較すると-0.120から-0.213に変化しており、これは割高株基調が強まっていることを意味する。つまり、割高株の保有割合を増やせばリターンは増加したが、実際にはファンドAは図表2の β_{HML} が0.42から0.55に変化していることから割高株の保有割合を減少させてしまっている。このように、リターンが出る投資方法と反対の運用をしていることがもう1つの要因である。

5. 問4

$x_i (i = A, B, C, D)$ をファンドA, B, C, Dに対する投資の配分比率、 $E(R_i) (i = A, B, C, D)$ をフ

ファンド A,B,C,D の期待リターン、 $\sigma_i (i = A, B, C, D)$ をファンド A,B,C,D のリターンの標準偏差、 $\rho_{ij} (ij = A, B, C, D, i \neq j)$ をファンド i と j のリターンの相関係数とするとき、Z 年金基金の日本株ポートフォリオ全体の期待リターン $E(R_Z)$ と分散 $\sigma^2(R_Z)$ を答えなさい。

全体の期待リターンは各ファンドに対する配分比率にそれぞれの期待リターンをかけたものを足し合わせれば良いので $E(R_Z) = x_A E(R_A) + x_B E(R_B) + x_C E(R_C) + x_D E(R_D)$ となる。

確率変数が 4 つの時の全体の分散を考えると、分散 $\text{Var}[X]$ の定義は $\text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2]$ なので

$$\begin{aligned} & \text{Var}(A + B + C + D) \\ &= E[\{(A - \mu_A) + (B - \mu_B) + (C - \mu_C) + (D - \mu_D)\}^2] \\ &= E[\{(A - \mu_A) + (B - \mu_B)\}^2 + \{(C - \mu_C) + (D - \mu_D)\}^2 + 2\{(A - \mu_A) + (B - \mu_B)\}\{(C - \mu_C) + (D - \mu_D)\}] \\ &= E[(A - \mu_A)^2 + (B - \mu_B)^2 + 2(A - \mu_A)(B - \mu_B) + (C - \mu_C)^2 + (D - \mu_D)^2 + 2(C - \mu_C)(D - \mu_D) \\ & \quad + 2\{(A - \mu_A)(C - \mu_C) + (A - \mu_A)(D - \mu_D) + (B - \mu_B)(C - \mu_C) + (B - \mu_B)(D - \mu_D)\}] \end{aligned}$$

となる。

ここで式を整理すると

$$= E[(A - \mu_A)^2 + (B - \mu_B)^2 + (C - \mu_C)^2 + (D - \mu_D)^2 + 2\{(A - \mu_A)(B - \mu_B) + (A - \mu_A)(C - \mu_C) + (A - \mu_A)(D - \mu_D) + (B - \mu_B)(C - \mu_C) + (B - \mu_B)(D - \mu_D) + (C - \mu_C)(D - \mu_D)\}]$$

となる。

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \text{ より}$$

$$= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2 + \sigma_D^2 + 2\{\text{Cov}(A, B) + \text{Cov}(A, C) + \text{Cov}(A, D) + \text{Cov}(B, C) + \text{Cov}(B, D) + \text{Cov}(C, D)\}$$

となる。

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(ij)}{\sigma_i \sigma_j} \text{ より、 } \text{Cov}(i, j) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \text{ なので}$$

$$= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2 + \sigma_D^2 + 2(\sigma_A \sigma_B \rho_{AB} + \sigma_A \sigma_C \rho_{AC} + \sigma_A \sigma_D \rho_{AD} + \sigma_B \sigma_C \rho_{BC} + \sigma_B \sigma_D \rho_{BD} + \sigma_C \sigma_D \rho_{CD})$$

となる。

これより、Z 年金基金の日本株ポートフォリオ全体の分散は

$$\begin{aligned} & \sigma^2(R_Z) \\ &= \text{Var}(x_A R_A + x_B R_B + x_C R_C + x_D R_D) \\ &= x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + x_C^2 \sigma_C^2 + x_D^2 \sigma_D^2 + 2 \\ & \times (x_A x_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} + x_A x_C \sigma_A \sigma_C \rho_{AC} + x_A x_D \sigma_A \sigma_D \rho_{AD} + x_B x_C \sigma_B \sigma_C \rho_{BC} + x_B x_D \sigma_B \sigma_D \rho_{BD} + x_C x_D \sigma_C \sigma_D \rho_{CD}) \end{aligned}$$

となる。

※ x_i は定数なので分散の外に出て 2 乗される。

6. 問5

「図表4に示された期待リターンの予測値は、ファンドAよりも、ファンドB、Cの方が高い。一方、ファンドB、Cへの最適配分比率はファンドAよりも低くなる。その理由を説明しなさい。なお、ファンド*i*(*i*=A,B,C,D)に対する配分比率だけを微小な幅 Δx_i だけ上昇させたときの効用関数 $U(RZ)$ の上昇幅 ΔU_i は、近似的に次の式となることを踏まえて答えること。」

$$\Delta U_i \cong [E(R_i) - \gamma(x_i\sigma_i^2 + x_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij} + x_k\sigma_i\sigma_k\rho_{ik} + x_l\sigma_i\sigma_l\rho_{il})] \times \Delta x_i$$

問4で、効用関数を最大化する配分を計算すると、Aが22.2%、Bが16.2%、Cが15.0%、Dが46.6%となることが分かった。

図表4 各ファンドの期待リターン、分散と相関係数の予測値（2020年4月～2025年3月）

	期待リターン (月率%)	分散	相関係数			
			ファンドA	ファンドB	ファンドC	ファンドD
ファンドA	0.456	0.00181	1			
ファンドB	0.517	0.00187	0.69588	1		
ファンドC	0.516	0.00242	0.45951	0.80414	1	
ファンドD	0.459	0.00141	0.87567	0.89887	0.76680	1

(注) 分散(月率)は小数表示

ファンドAの配分比率は、ファンドB、Cに比べて大きいはずが、図表4を見ると、ファンドAの期待リターンはファンドB、Cに比べて小さい値になっている。その理由を、与えられた効用関数の上昇幅を表す式を使って説明するというのがこの問題である。

まず、与えられた式の右辺に着目すると、 $[E(R_i)] \times \Delta x_i$ と、

$-\gamma(x_i\sigma_i^2 + x_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij} + x_k\sigma_i\sigma_k\rho_{ik} + x_l\sigma_i\sigma_l\rho_{il})] \times \Delta x_i$ という二つの項に分けることができると考えられる。項の符号から、前者は効用のプラスの要素、後者はマイナスの要素と考えることとする。仮にファンドAの配分比率を微小な幅上昇させたとき、その時のマイナスの要素を詳しくみると、ファンドAの分散や、他のファンドとの相関係数が含まれていることがわかる。そのため、これらの数値(分散や相関係数)が大きければ、マイナスの要素が大きくなって、効用関数の上昇幅は小さくなると考えることができる。ファンドAは、ファンドB、Cと比べて分散が小さく、他のファンドとの相関係数も比較的小さい。そのため、ファンドB、Cの方が、期待リターンは大きいものの、分散や相関係数の大きさから、効用を減らしてしまう要素も大きい。一方でファンドAは、期待リターンは小さいものの、効用を減らす要素は小さくすることができている。つまり結論としては、

「ファンド B、C は、期待リターンは高いが、分散が A よりも高く、B、C ともにグローバル株ファンドであることから相関が高い。一方ファンド A は、バリュー株のファンドで B、C との相関が低く、分散も比較的小さい。このようなリスクが高い分、ファンド B、C は、その配分比率を上昇させたときの効用の上昇が A に比べて大きく減じられてしまうため、最適配分比率はファンド A よりも低くなる」

となり、これをもって問 5 の解答とする。

【参考文献】

伊藤敬介、荻原誠治、諏訪部貴嗣. 新・証券投資論 実務編. 日本経済新聞出版, 2009, 428p.

佐野三郎. パーフェクト証券アナリスト第2次レベル. ビジネス教育出版社, 2022, 464p.

[銘柄検索・取扱一覧 | 投資信託・外貨建 MMF | SBI 証券 \(sbisec.co.jp\) 閲覧](#)

日:2023/12/14

【補論】

① 効用関数

効用関数とは、特定の物やサービスを購入した時に得られる満足度が、物やサービスが増えるほどにどのように変化するかを表したものである。証券投資を行う際に考える効用は、「貨幣価値から得られる満足度」のことだが、この時の効用関数も一般的な物やサービスで得られる効用関数と同じような性質を持つ。効用関数の性質とは、財産が大きいほど満足度は大きいこと、財産が大きくなるほど追加で財産を得たときの満足度は小さくなることをいう。具体的に考えると、保有する貨幣の量が増えれば増えるほど、効用が大きくなるが、貨幣の量が莫大になると、追加的に得られる1円あたりの満足度は下がっていく。貨幣量が1万円の時に1円増えるのと、10億円の時に1円増えるのでは、感じる満足の度合いは10億円で1円が増えた時の方が少ない、と考えることができる。これを「限界効用の逡減」と呼ぶ。効用関数を凹関数とすれば、右へ行くほどに効用を表す曲線の傾きが平らになっていくので、追加的に得られる効用が無くなっていく限界効用が逡減する様子を表すことができる。

効用関数を $U = E(R_p) - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \sigma_{R_p}^2$ とする。このとき仮に効用を最大化する無リスク資産とリスク資産のポートフォリオの組み合わせを求める。

リスク資産：S

無リスク資産：f

リスク資産のポートフォリオの投資比率：w（定数）

無リスク資産の投資比率：1 - w（定数）

将来のポートフォリオのリターンの期待値：E(Rp)

リスク資産のリターンの期待値：E(Rs)

無リスク資産のリターン：Rf（定数）

リスク回避度： γ

とする。

このとき

$$E(R_p) = w \cdot E(R_s) + (1-w)R_f$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_p) &= \text{Var}(w \cdot R_s + (1-w)R_f) \\ &= w^2 \text{Var}(R_s) \end{aligned}$$

となる。

※ X を確率変数、a, b を定数とすると以下の式が成り立つ。

$$\text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[X]$$

効用関数の式にポートフォリオの将来のリターンの期待値と分散の式を代入すると

$$U = \underbrace{w \cdot E(R_S) + (1-w)R_f}_{=E(R_p)} - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \underbrace{w^2 \text{Var}(R_S)}_{=\sigma^2(R_p)}$$

となる。

$$U = w \cdot E(R_S) + (1-w)R_f - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot w^2 \text{Var}(R_S)$$

$$= f(w)$$

と置き、w について微分すると

$$f'(w) = E(R_S) - R_f - \gamma \cdot w \text{Var}(R_S) = 0$$

$$\gamma \cdot w \text{Var}(R_S) = E(R_S) - R_f$$

$$w = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{E(R_S) - R_f}{\text{Var}(R_S)}$$

となる。

※ w の二次の項の符号がマイナスなので w について微分し $f'(w)=0$ としたときの w で U が最大値を取ることがわかる。

投資家のリスク回避度とリスク資産のポートフォリオのリターンの分散が大きいほどリスク資産の投資比率が低くなり、無リスク資産に対する期待超過リターンが大きいほどリスク資産の投資比率が高くなるのが上の式からわかる。

② アクティブリターン・トラッキングエラー・インフォメーションレシオ (リスク調整後のリターンのその他)・決定係数

【1】 アクティブリターン

アクティブ運用の成果が良いということは、ポートフォリオとベンチマークのリターンの差が大きいと考えることができる。このリターンの差を、「アクティブリターン」と呼び、アクティブリターンはベンチマークに対する超過収益である。

【2】 トラッキングエラー

次に、アクティブリターンの標準偏差のことをアクティブ・リスク、別名「トラッキングエラー」と呼び、以下のような式で表されたアクティブリターンの分散の平方根で表される。

$$\text{Var}(R_A) = \text{Var}(R_P - R_I) = \text{Var}(R_P) - \underbrace{2\text{Cov}(R_P, R_I)}_{=2\rho_{R_P, R_I} \cdot \sigma_{R_P} \cdot \sigma_{R_I}} + \text{Var}(R_I)$$

【3】 インフォメーションレシオ

インフォメーションレシオとは、アクティブリターンをトラッキングエラーで除した指標である。つまりこの数値は、ベンチマークからの超過リターン (アクティブリターン)

をとるためにどのくらいのリスクをとったかを計算することができる。この数値が大きいほどリスクに対する超過リターンが高く、アクティブ運用の効率が良いことを示す。よってインフォメーションレシオは、「リスク調整後のアクティブリターン」だと言える。

ここで、具体例を用いてインフォメーションレシオを求めてみる。あるファンドのリターンの期待値が7%、標準偏差が17%と分かっている。一方で、ベンチマークのリターンの期待値は4%、標準偏差は8%である。そして両方の期待リターンの相関係数は0.82である。

アクティブリターンは、 $7\% - 4\% = 3\%$ で求めることができる。一方、トラッキングエラーは、上のトラッキングエラーの解説で示した式を用いて、

$$\begin{aligned}\text{Var}(R_P - R_I) &= \text{Var}(R_P) - 2\text{Cov}(R_P, R_I) + \text{Var}(R_I) \\ &= \text{Var}(R_P) - 2\rho_{R_P, R_I} \cdot \sigma_{R_P} \cdot \sigma_{R_I} + \text{Var}(R_I)\end{aligned}$$

$$17^2 - 2 \times 0.82 \times 17 \times 8 + 8^2 = 129.96$$

$$\sqrt{129.96} = 11.4\%$$

となる。最後に、求めたアクティブリターンをトラッキングエラーで除することで、インフォメーションレシオは0.26と求めることができる。

しかし、このように求めてきたアクティブリターンやインフォメーションレシオの値は誤差であり、実際はアクティブ運用能力がないのではないかという疑問が浮かび上がってくる。そこでアクティブ運用能力を確かなものとするために、仮説検定を行う。

《仮説検定》

仮説検定とは、証明したいこと（対立仮説）と反対の仮説（帰無仮説）を立てて、帰無仮説が正しくないこと証明することによって、対立仮説を証明するという手法である。例えば、データの平均値が0であるという帰無仮説を棄却することによって、データの平均値が0と異なることを証明する仮説検定を1群のt検定と呼び、データの平均値が0とは異なる3つの条件からt値を算出することから始めていく。

条件1 データの平均値が0と大きく離れている。

条件2 データの平均値が信用できる（データの分散が小さい）

条件3 サンプルサイズが大きく、データの偶然の要素が小さい。

$$t = \frac{\mu - 0}{\sqrt{\sigma^2 \div n}}$$

これらの条件を数値としてあらわしたものがt値であり、上の式で定義される。3つの条件を満たしていれば、t値は大きくなっていくと考えることができる。

《t値の基準》

ここで、「t値がどの基準よりも大きければ、データの平均が0ではないと言えるの

か」という疑問が浮かぶ。この基準は通常2程度に設定されており、t値が2よりも大きければ帰無仮説は棄却できるということである。しかし、この基準が必ずしも2であるとは限らず、この基準は有意水準と自由度によって確定する。有意水準とは、ある事象が起こる確率が偶然とは考えにくいと判断する基準となる確率である。つまり、帰無仮説を棄却する基準となる確率で、5%、1%に設定されることが多い。自由度は、「n-1」で定義される。平均を出したときのn（サンプル数）から1を引いた値で、自由に決めることができる値の数である。これらの数値を、t分布表に照らし合わせることで帰無仮説を棄却する基準となるt値を確定することができる。

例えば、過去10年間のアクティブリターンの平均が0.5%、その標準偏差が1.3%のファンドがあるとし、このファンドにはアクティブ運用能力があるのか、ということ仮説検定によって証明してみる。「ファンドにはアクティブ運用能力がある」という対立仮説に対し、「ファンドのアクティブ運用能力は0である」という帰無仮説を立ててt値を求める。上で示したt値の定義より、t値は以下の様に求めることができる。

$$t = \frac{\bar{r}_A - 0}{\frac{s_{r_A}}{\sqrt{n}}} = \frac{0.5 - 0}{\frac{1.3}{\sqrt{10}}} \approx \frac{0.5}{0.411096} \approx 1.216$$

有意水準を5%としたとき、自由度（10-1=9）と照らし合わせることで、帰無仮説を棄却する基準となるt値は1.83になる。つまり、このファンドのアクティブリターンの平均値は0であるという帰無仮説は受容されてしまい、「このファンドにはプラスのアクティブ運用能力がない可能性がある」という結論に至ってしまう。

ここで、アクティブリターンの平均がどのくらいの大きさを持っていれば、帰無仮説を棄却できたのかということを考えるのであれば、t値がその基準である「1.83よりも大きくなる」という不等式を立てて計算すれば良い。この不等式を解くことで、アクティブリターンの平均が0.752よりも大きければ、このファンドにはアクティブ運用の能力があると証明することができた。

【4】 リスク調整後のリターン

前節で示したインフォメーションレシオは、リスク調整後のリターンであった。インフォメーションレシオ以外にもリスク調整後のリターンを示す指標があり、ここでは「ジェンセンの α 」、「トレイナーの測度」について解説する。

《ジェンセンの α 》

ジェンセンの α は、パフォーマンスを測る尺度の一つで、ポートフォリオのリターンが理論的に期待されるリターンに比べてどれだけ上回ったかを示す指標である。例えば、CAPMの理論が成り立つとすれば、すべてのファンドがこの理論に従ったリターンを上げ

ることになる。しかし現実では理論から乖離したリターンを上げるファンドももちろんある。そのように、理論では説明できないような超過収益のことをジェンセンの α とし、 β (リスク) が同じ時の理論値と比べた儲かり度合いと考えるとわかりやすい。この値がプラスならば理論では説明できないリターンをあげたことになり、マイナスならば理論では説明できない運用の失敗があったということがわかる。

《トレーナーの測度》

トレーナーの測度は、以下の様に表すことができる。

$$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$$

市場ポートフォリオと比較してどれくらい反応するかが β (リスク感応度) であり、この感応度が大きくなった時にどのくらいリターン (無リスク資産のリターンを除いた) が上がるのかを測る尺度が、トレーナーの測度である。この数値が大きいほど、ポートフォリオの成果が大きいと言える。

トレーナーの測度とよく似た指標に、シャープレシオがある。リスクの調整を、 β か、リターンの標準偏差で行っているかの違いだけであるが、 β で調整しているトレーナーの測度は、景気の悪化など、市場そのものに存在するリスク (システムティックリスク) を加味せずにポートフォリオの能力を知ることができるという特徴がある。

【5】 決定係数

決定係数とは、推定された予測モデル (回帰式など、過去のデータから作った、未来の値を予測するための数式やルール) の当てはまりの良さを示す数値である。0 から 1 の間の値をとり、1 に近いほど予測の精度が高く、0 に近いほど精度が低いことを表わす。決定係数は次のような式で定義される。

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

この式の 1 から減じられている部分の分子は、実測値から予測値の値を引いて 2 乗した値をすべて足したものになっている。すなわち、予測モデルで予測しきれなかったばらつき全体を示している。一方で分母は、予測する前の実測値のばらつきを示している。つまり上の式で定義される決定係数は、定義式から読み取れるように、実測値のばらつきに占める予測値のばらつきの程度を数値化したものであるとわかる。

通常は、予測モデルは予測が目的であるため、実際の数値のばらつきよりも残差 (予測値の数値のばらつき) が大きくなることはない。そのため、この 1 から減じられている値は 1 よりも小さくなる。そして、予測値が実測値と良く当てはまっているとき、予測値 = 実測値であり、この時分子の値は 0 になるためこの数値は 0 である。よって決定係数は 0

から1の間をとる。この値を1から引いているため、予測値の数値のばらつき（残差）が小さければ、1から引かれる部分は小さくなり、決定係数は1に近づく。一方、予測値のばらつきが大きければ、決定係数は0に近づく。つまり、決定係数は、予測モデルの精度が高いほど1に近づき、精度が低いほど0に近づくということがわかり、予測モデルの精度を数値化したものであると言える。

③ 投資スタイル

投資スタイルとはファンドマネージャーがファンドに組み入れる銘柄を選択する際の投資方針である。ファンドマネージャーは個人投資家や機関投資家から委託された資金を株式や債券、投資信託などの金融商品に投資・運用し、得られた利益を投資家に還元している。ファンドマネージャーの採用する投資方針によって、リスクの取り方や得られるリターンが異なる。実在するファンドを例に挙げると、「SBI-SBI 日本株 4.3 ブル」は日本の公社に投資をするとともに株価指数先物取引を積極的に活用し、日本株式市場全体の約4.3倍となる投資成果を出すアクティブ運用を採用している。ファンドによりどの金融商品に投資をし、どの程度のリターンを目指すのかが各々異なるため、自身の投資スタイルに適したファンドを選択することが重要である。

④ ファーマフレンチの3ファクターモデル

ファーマフレンチの3ファクターモデルについて述べる。ファーマフレンチの3ファクターモデルは、ある資産のリターンの変動をマーケット全体のリスクプレミアム、時価総額、簿価時価比率の3つのファクターで説明するモデルであり、

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_{MKT} f_{MKT} + \beta_{SMB} f_{SMB} + \beta_{HML} f_{HML} + \varepsilon \quad (1)$$

で表される。 R_i は株式*i*の期待収益率、 R_f は無リスク金利、 α_i はファンドマネージャーの運用スキル、 $f_{MKT}, f_{SMB}, f_{HML}$ はマーケット・ファクター、サイズ・ファクター、バリュエーション・ファクター、 $\beta_{MKT}, \beta_{SMB}, \beta_{HML}$ は3つのファクターそれぞれに対するエクスポージャー、 ε は誤差を表す。 R_i から R_f を引くことで、株式*i*の超過リターンを求める。超過リターンは、 α_i で表されるファンドマネージャーの運用スキルによって得られたリターン、 $\beta_{MKT} f_{MKT}$ で表されるマーケットの成長によって得られたリターン、 $\beta_{SMB} f_{SMB}$ で表される小型株効果によって得られたリターン、 $\beta_{HML} f_{HML}$ で表される割安株効果によって得られたリターンを足し合わせたものである。後ろの3項は誰が運用しても同じリターンが得られるため、ファンドマネージャーの運用スキルが超過リターンの変動要因となる。

ファーマ・フレンチは時価総額の大きさと簿価時価比率の高さを基準に市場全体の株式を以下の表のように区分した。

		時価総額の大きさ	
		大(Big)上位50%	小(Small)下位50%
B/P比率	高(High)30%	大・高(BH)	小・高(SH)
	中(Medium)40%	大・中(BM)	小・中(SM)
	低(Low)30%	大・低(BL)	小・低(SL)

出典：パーフェクト証券アナリスト第2次レベル(2022)p.164を参考に作成
 時価総額の大きさを基に市場の株式を上位50%、下位50%に、簿価時価比率の高さを基に上位30%、下位30%、中位40%の2×3の6つに分類した。 f_{SMB} , f_{HML} は、小型株と大型株のリターンの差、割安株と割高株のリターンの差で表される。

$$f_{SMB} = \frac{SH+SM+SL}{3} - \frac{BH+BM+BL}{3} = R_S - R_B \quad (2)$$

$$f_{HML} = \frac{SH+BH}{2} - \frac{SL+BL}{2} = R_H - R_L \quad (3)$$

つまり、 f_{SMB} がプラスの値の時は小型株の平均リターンが高く、マイナスの時は大型株の平均リターンが高いことを意味する。同様に、 f_{HML} がプラスの値の時は割安株の平均リターンが高く、マイナスの時は割高株の平均リターンが高いことを意味する。 f_{MKT} は株式や債券などのリスク資産を時価総額比率に応じて投資した最も分散の効いたポートフォリオである市場ポートフォリオから無リスク金利を差し引いて求められるため、

$$f_{MKT} = R_{mkt} - R_f \quad (4)$$

(1)の式に(2)、(3)、(4)を代入すると

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_{MKT}(R_{mkt} - R_f) + \beta_{SMB}(R_S - R_B) + \beta_{HML}(R_H - R_L) + \varepsilon \quad (5)$$

となる。

また、 β_{MKT} , β_{SMB} , β_{HML} は3つのファクター各々に対するファンドpのエクスポージャー、言い換えると、リスクファクターに対してポートフォリオがされされている度合いを表す。例えば、ある投資家が資金の半分を日本株式で残りを現金で保有している場合、50%分は日本株式の価格変動リスクにさらされていることになり、ポートフォリオの日本株式へのエクスポージャーは50%となる。 $\beta_{MKT}(R_{mkt} - R_f)$ に注目すると、 β_{MKT} の値がプラスの時は市場ポートフォリオを購入し、無リスク金利を売却することを意味しており、 β_{MKT} の値がマイナスの時は市場ポートフォリオを売却し、無リスク金利を購入することを意味する。 $\beta_{SMB}(R_S - R_B)$ と $\beta_{HML}(R_H - R_L)$ も同様に、 β_{SMB} がプラスの値の時は小型株を購入し大型株を売却する、 β_{SMB} がマイナスの時は大型株を購入し小型株を売却する、 β_{HML} がプラスの値の時は割安株を購入し割高株を売却する、 β_{HML} がマイナスの値の時は割高株を購入し割安株を売却することを意味している。