オプションプライシングと ボラティリティ変動に関する一考察

2014年　12月16日（火）　４、５限

法政大学　経営学部　経営学科　山嵜ゼミ　4年　小倉大樹

はじめに

・本論文では、Black-Scholesモデルを前提としたオプションのプライシング理論において定数と仮定されているボラティリティを関数として捉えることによって導かれるより現実的なモデルを研究する。また数値検証を行うことでそのモデルがどのようなボラティリティ・スマイルを持つのかを示す。さらに、ボラティリティ・スマイルの検証結果から明らかになったことと現実のマーケットでの事例とを比較し、そこにどのような整合性をもつのかを確認する。

目次

１．Black−Scholesモデルの問題点

・Black-Scholesモデルのプライシング理論において、ボラティリティは定数として与えられている。しかし実際にはボラティリティは時間の関数、すなわち時間とともに変化するものという考え方が一般的である。すなわち、株価過程 $dS=rSdt+\sigma(t)Sdz$ のように、ボラティリティのパラメータ部分を時間の既知関数とするのが自然である。

２．ボラティリティが従う関数の研究

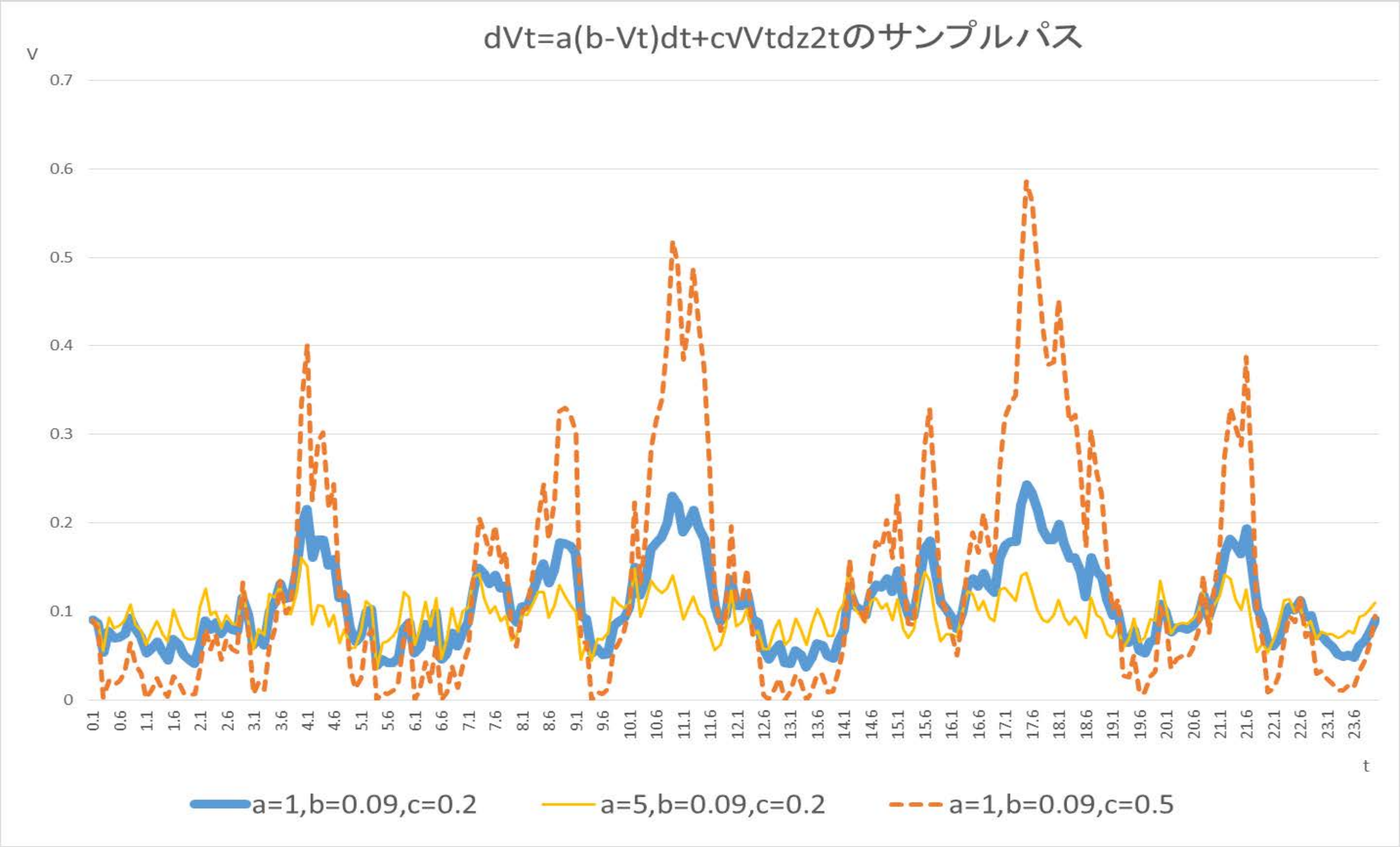
・そこで、株価のボラティリティが以下に示すような平均回帰過程に従う関数として表現することによって、Black-Scholesモデルの「ボラティリティが一定」という仮定から拡張することができる。

＜平均回帰過程（この場合、CIR過程という）＞

$$dV_t = a(b - V_t)dt + c\sqrt{V_t}\,dz_t^2$$

2. ボラティリティが従う関数の研究

＜$dV_t=a(b-V_t)dt+c\sqrt{V_t}dz_t^2$のサンプルパス＞



・a=1,b=0.09,c=0.2をベンチマークとして、a=5,c=0.5に変更した場合のそれぞれのパスが左図である。

２. ボラティリティが従う関数の研究

・サンプルパスの結果から、平均回帰過程 $dV_t = a(b - V_t)dt + c\sqrt{V_t}dz_t^2$ について、以下の二点を確認することができた。

①パラメータaの値が大きいほど、パラメータbの値に回帰する強さが大きくなる

②パラメータcの値が大きいほど、パラメータbの値から乖離する強さが大きくなる

３．確率ボラティリティモデルの研究

・Heston(1993)は、ボラティリティは確率的に変動すると考えることで、株価とボラティリティの二つを確率変数とするモデルを生み出した。それが確率ボラティリティモデル（Stochastic volatility model）である。

＜確率ボラティリティモデル＞

$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t \varepsilon_1 \sqrt{dt}$

$dV_t = a(b - V_t)dt + c\sqrt{V_t}(\rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2)\sqrt{dt}$

ただし、$\sigma_t = \sqrt{V_t}$

３．確率ボラティリティモデルの研究

＜確率ボラティリティモデルの特徴＞

・Black-Scholesモデルにおいて、オプション価格の不確実性は原資産を用いることで消去することができる。一方、確率ボラティリティモデルではボラティリティ自身の変動がもたらす不確実性が残るため、これに対するリスクプレミアムが生じる。（ボラティリティ・リスクプレミアム）

・ボラティリティ・リスクプレミアムはオプションのベガの影響を受けるので、ベガが最大であるATMでこの影響も大きくなると考えられる。

４．確率ボラティリティモデルの
ボラティリティ･スマイルの分析

･前述したように、Black-Scholesモデルによる株価変動の枠組みにおいてボラティリティは定数として与えられている。しかし確率ボラティリティモデルでは、ボラティリティが確率変動し、インプライド･ボラティリティは行使価格ごとに異なる値をとる。（いわゆるボラティリティ･スマイルが形成される）

･本研究では、確率ボラティリティモデルの各パラメータがスマイルの形状にどう影響を与えるのかを検証した。

４．確率ボラティリティモデルの
　　ボラティリティ･スマイルの分析

＜パラメータ設定について＞

・主なパラメータ

	bm	high	low
a	2	10	0.1
c	0.3	0.5	0.15
ρ	0	0.7	-0.7

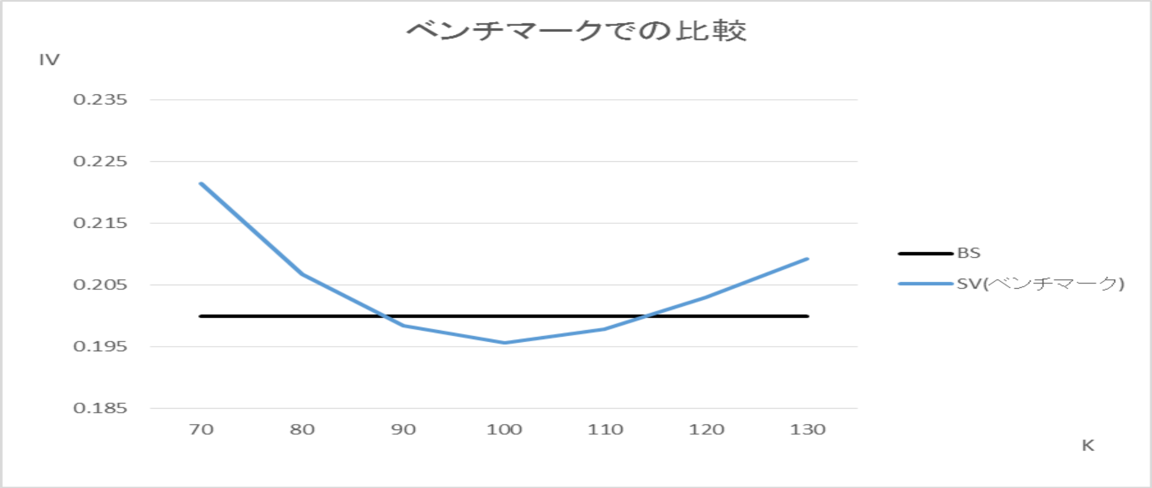
・その他のパラメータ

時点0の株価	残存期間	金利	標準偏差	時点0のボラティリティ	回帰水準	時点Tまでのステップ数	モンテカルロ試行回数	先物価格	行使価格
S_0	T	r	σ	V_0	b	N	M	F	K
100	0.5	0	0.2	0.04	0.04	100	1000000	100	70～130

4．確率ボラティリティモデルの
ボラティリティ･スマイルの分析

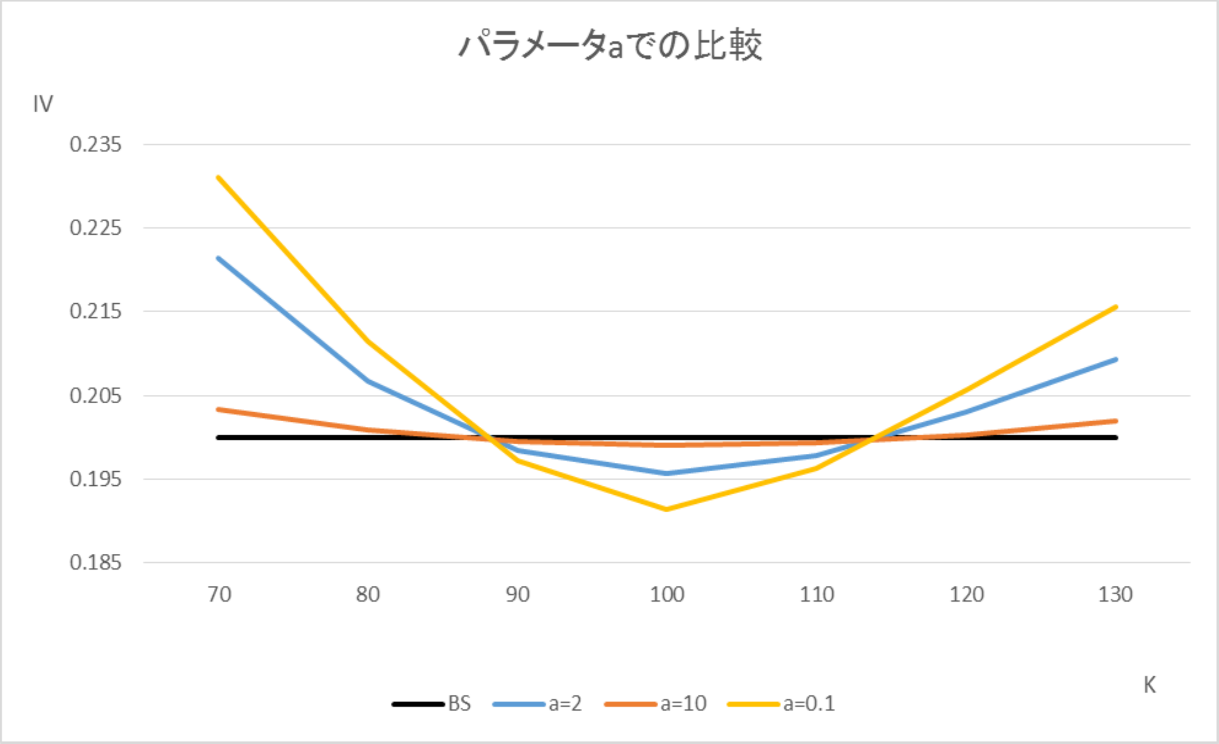
＜Black-Scholesモデルと確率ボラティリティモデルの比較＞

・ Black-Scholesモデルと確率ボラティリティモデル（パラメータはベンチマークの値）を比較すると、確率ボラティリティモデルは行使価格の高い所と低い所でBlack-ScholesモデルよりIVが高くなっている。



４．確率ボラティリティモデルの
ボラティリティ･スマイルの分析

＜パラメータaごとのボラティリティ･スマイルの変化＞

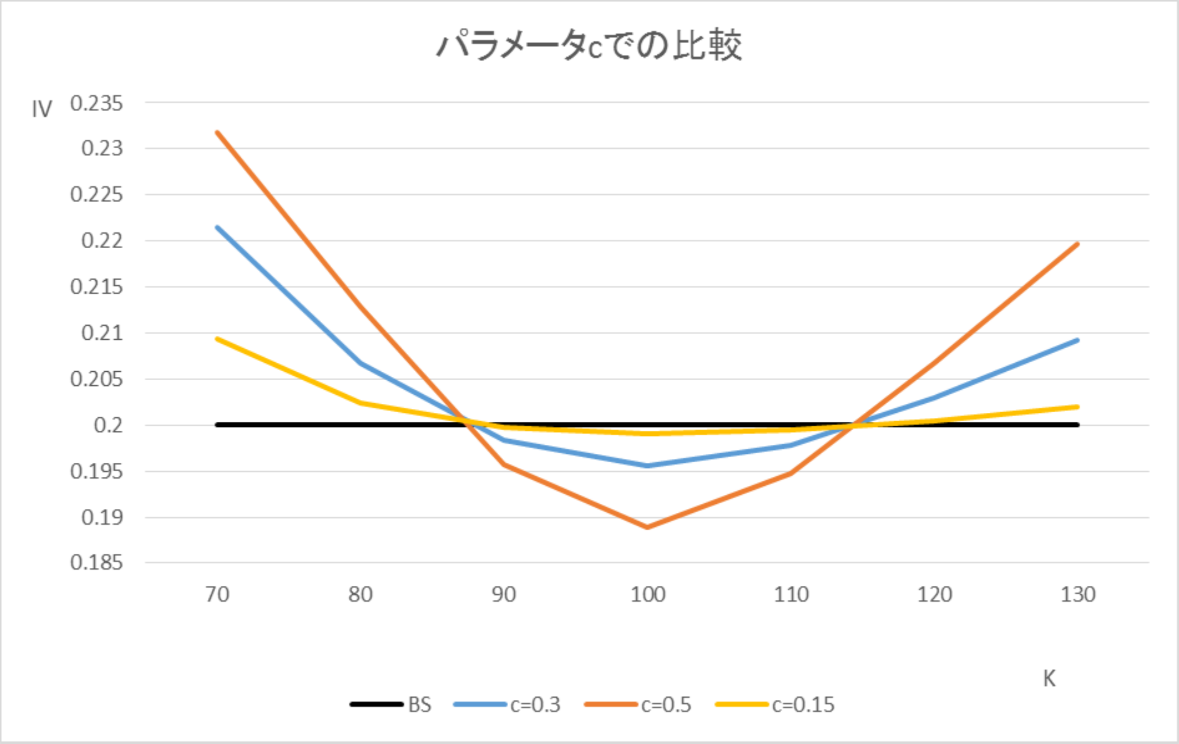


･「パラメータaが大きい」ほど、
IVは平均値(=0.2)に近くなる

･「パラメータaが小さい」ほど、
ATM→IVが平均値から下に乖離
低いK→IVが平均値から上に乖離
高いK→　IVが平均値から上に乖離

4. 確率ボラティリティモデルのボラティリティ・スマイルの分析

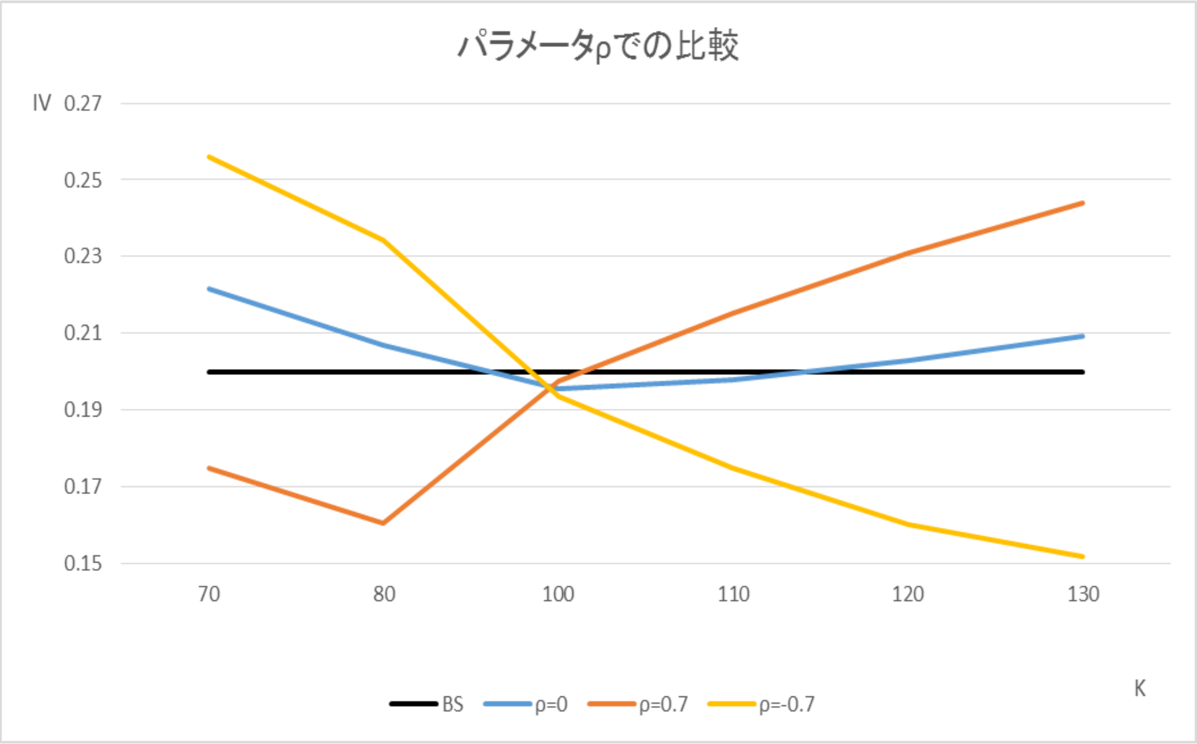
＜パラメータcごとのボラティリティ・スマイルの変化＞



- 「パラメータcが大きい」ほど、
  ATM→IVが平均値から下に乖離
  低いK→IVが平均値から上に乖離
  高いK→IVが平均値から上に乖離
- 「パラメータcが小さい」ほど、
  IVは平均値（=0.2）に近くなる

4. 確率ボラティリティモデルの ボラティリティ･スマイルの分析

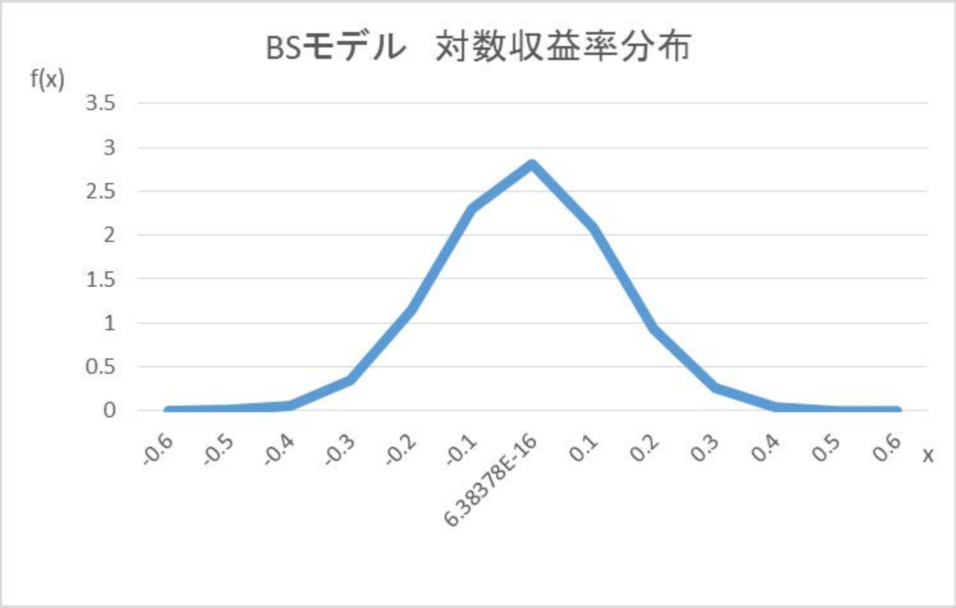
＜パラメータρごとのボラティリティ･スマイルの変化＞



- 「パラメータρが大きい」ほど、IVはATM近辺で平均値をとるような、右上がりの形状となる
- 「パラメータρが小さい」ほど、IVはATM近辺で平均値をとるような、右下がりの形状となる

4．確率ボラティリティモデルの ボラティリティ･スマイルの分析

・Black-Scholesモデルにおいて、株式の対数収益率は以下のような正規分布に従うと仮定されている。



平均	-0.01
標準偏差	0.141421
歪度	0.018852
尖度	0.068862

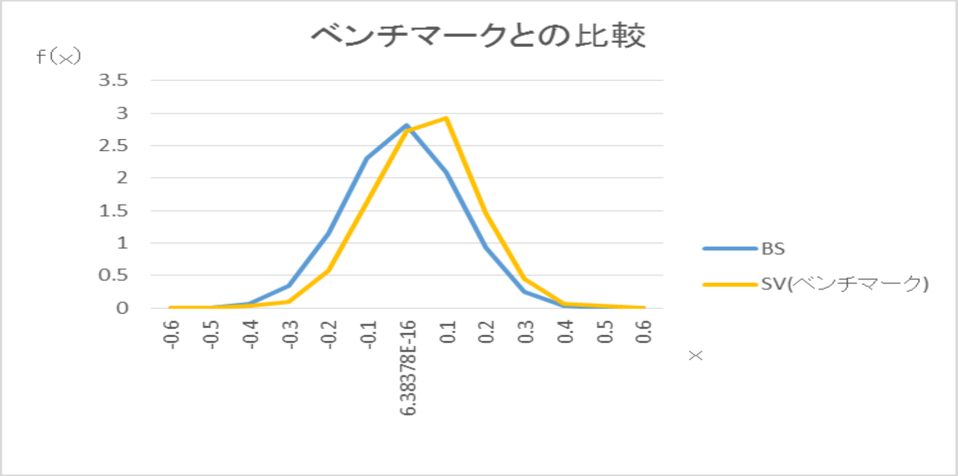
４．確率ボラティリティモデルの
ボラティリティ･スマイルの分析

・確率ボラティリティモデルの株式の対数収益率はどのような分布になるのだろうか。以降Black-Scholesモデルと確率ボラティリティモデルの各パラメータの変化を考慮して行った、株式の対数収益率に関する統計的な比較を示す。

4．確率ボラティリティモデルの
ボラティリティ・スマイルの分析

＜ Black-Scholesモデルと確率ボラティリティモデルとの比較＞

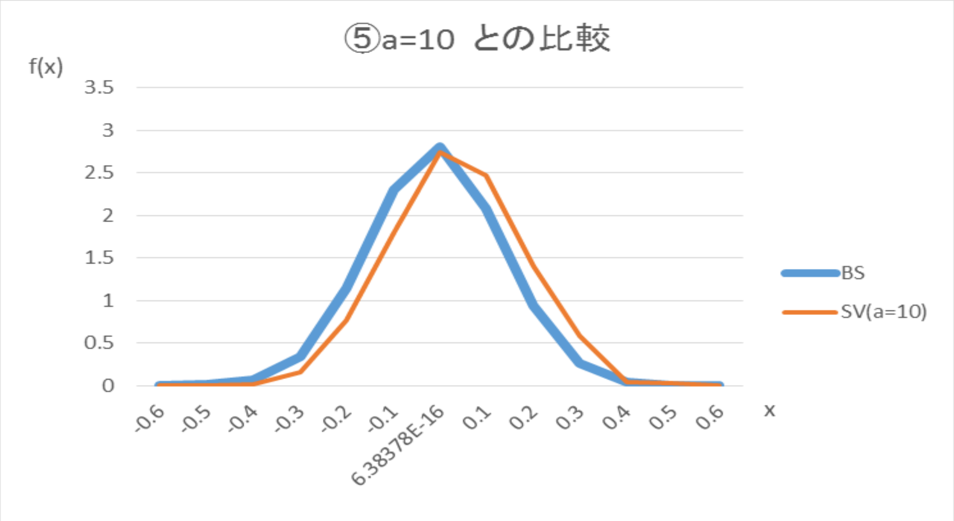
・Black-Scholesモデルと確率ボラティリティモデル（パラメータはベンチマークの値）の分布を比較すると、確率ボラティリティモデルは尖度、つまり裾が大きいことがわかる。

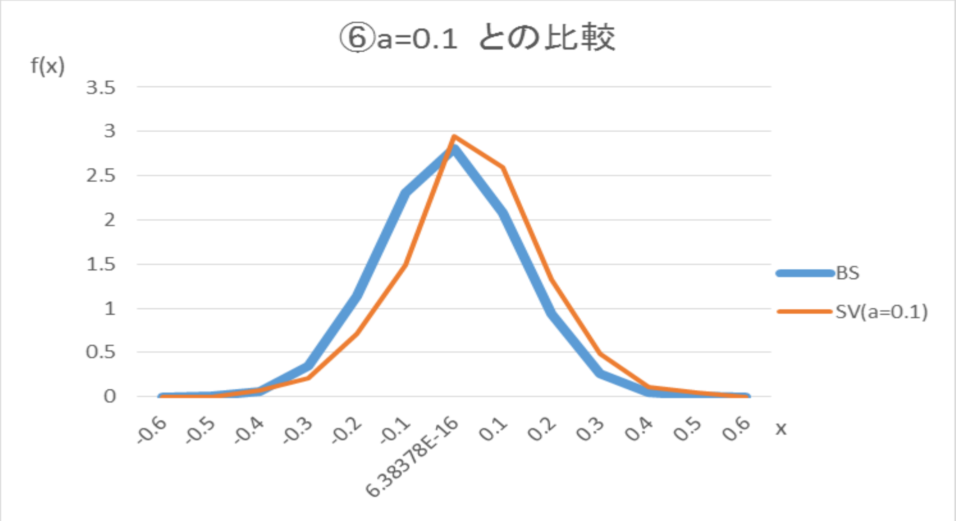


平均	-0.0107753
標準偏差	0.1343230
歪度	0.0033288
尖度	0.9879054

4. 確率ボラティリティモデルの ボラティリティ･スマイルの分析

＜パラメータaごとの収益率分布の変化＞



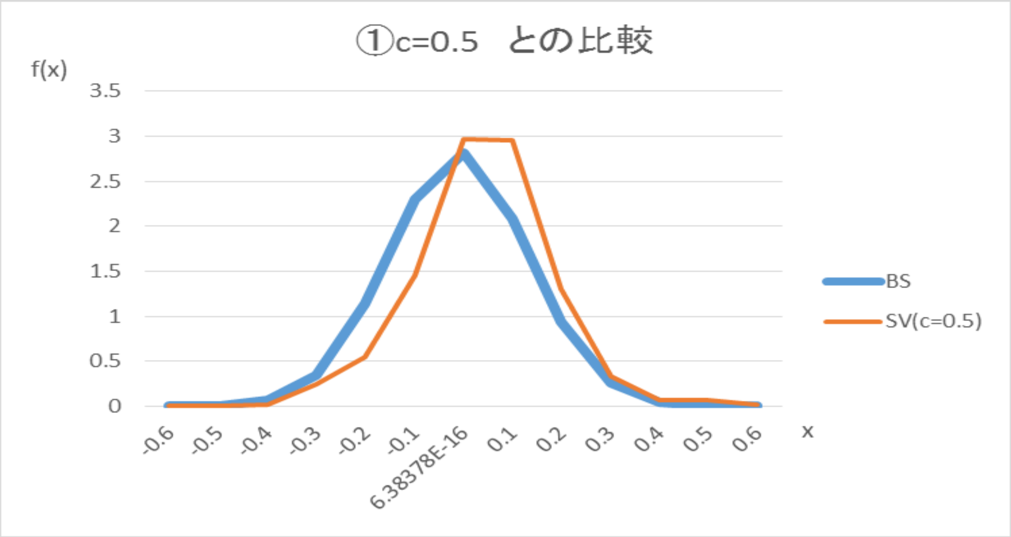


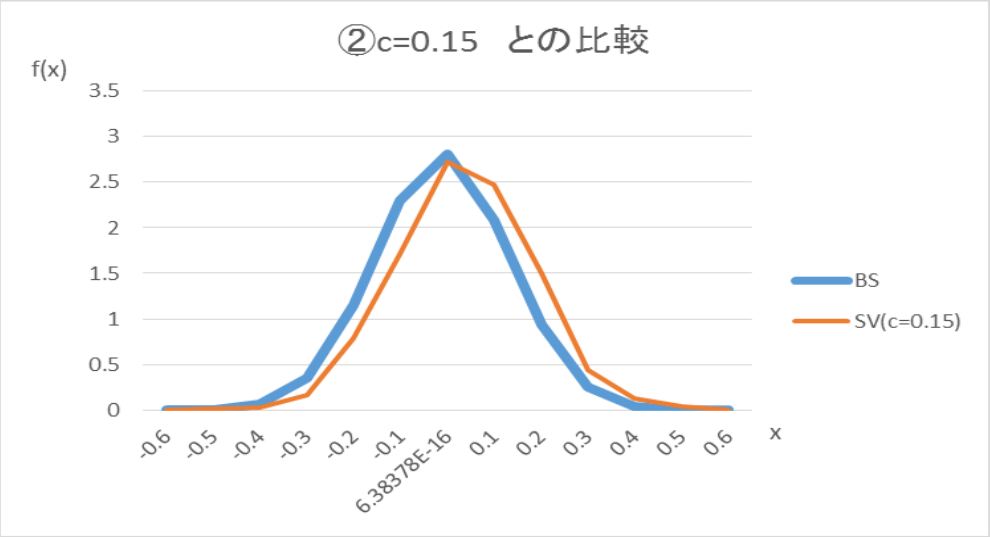
平均	-0.014640
標準偏差	0.139177
歪度	-0.02298
尖度	0.330772

平均	-0.013975
標準偏差	0.144921
歪度	0.062519
尖度	1.159488

4. 確率ボラティリティモデルの ボラティリティ･スマイルの分析

＜パラメータcごとの収益率分布の変化＞



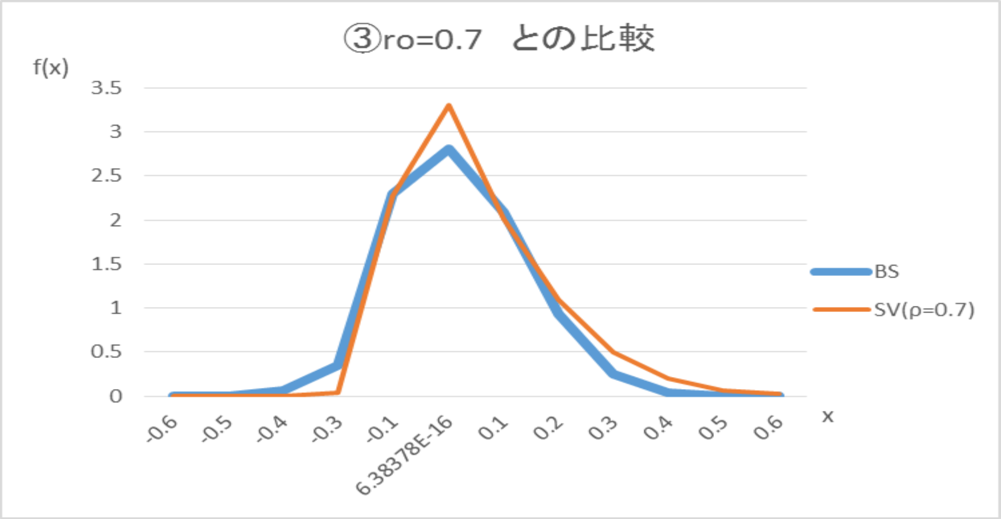


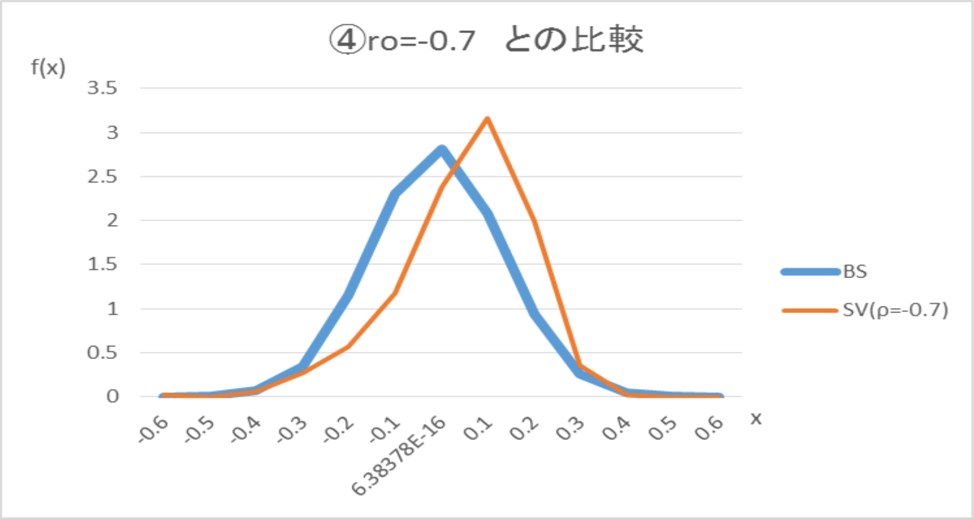
平均	-0.014798
標準偏差	0.141955
歪度	0.143349
尖度	1.503995

平均	-0.006785
標準偏差	0.146674
歪度	0.049358
尖度	0.121362

4. 確率ボラティリティモデルの ボラティリティ･スマイルの分析

＜パラメータρごとの収益率分布の変化＞





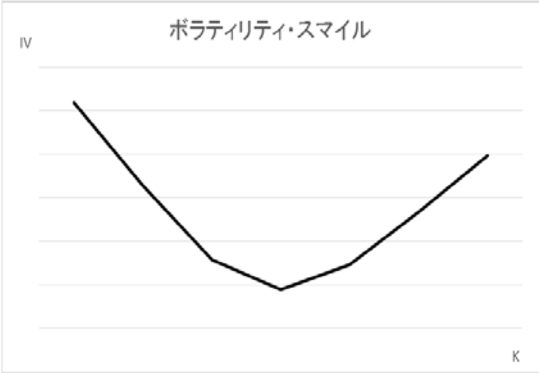
平均	-0.012687
標準偏差	0.140537
歪度	0.879229
尖度	1.228801

平均	-0.009757
標準偏差	0.142667
歪度	-0.78001
尖度	0.950532

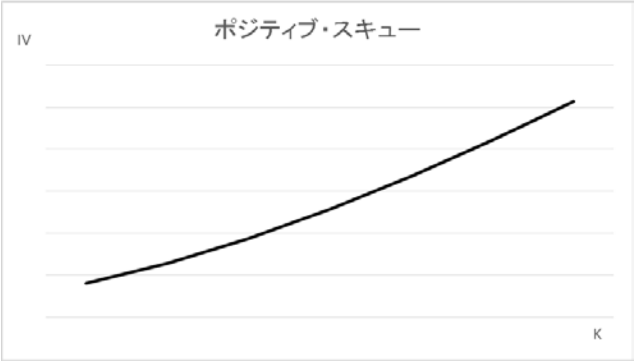
5. 分析結果と現実のマーケットとの整合性

・Black-Scholesモデルにかわる「より現実的なモデル」という観点から、
確率ボラティリティモデルのボラティリティ・スマイルの形状が以下のような現実のマーケットで観測されるものと整合的かどうか確かめる。

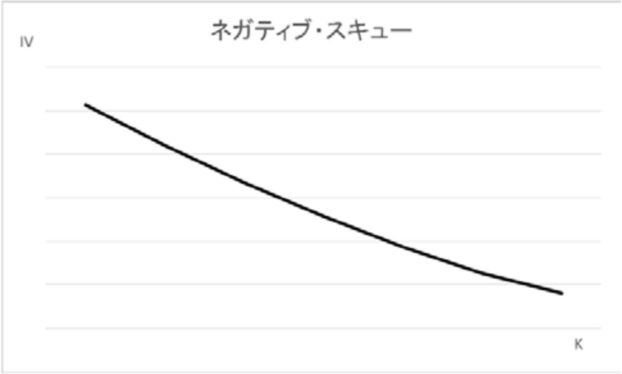
①スマイル



②ポジティブ・スキュー



③ネガティブ・スキュー



５．分析結果と現実のマーケットとの整合性

・確率ボラティリティモデルの各パラメータがボラティリティ・スマイル（スキュー）の形成に及ぼす影響は以下にまとめた通りである。

	a	c
小	①スマイル	①スマイル
大	①スマイル	①スマイル

	ρ
負の値	③ネガティブ・スキュー
正の値	②ポジティブ・スキュー

5．分析結果と現実のマーケットとの整合性

・パラメータa、c

→株価の上昇と下落の両方の状況に備えた投資家の将来の予想の度合いを反映するパラメータであるということができる

・パラメータρ

→パラメータρは株価の上昇に備えた投資家の予想の度合いを反映するパラメータであるということができる（$\rho > 0$）

→パラメータρは株価の下落に備えた投資家の予想の度合いを反映するパラメータであるということができる（$\rho < 0$）

６．結論

・本研究において明らかになったことは、以下の２点である。

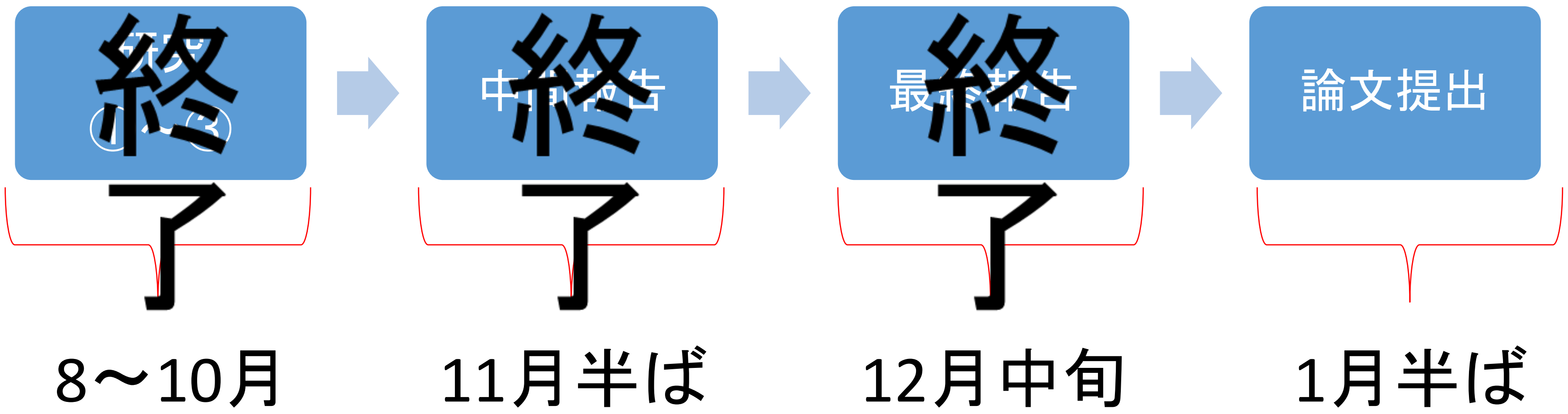
①確率ボラティリティモデルはBlack-Scholesモデルより株式の対数
　収益率の分布の裾が厚い（ボラティリティ・スマイルと整合的）

②確率ボラティリティモデルのパラメータ（a、c、ρ）を変化させることで、
　投資家のマーケットに対する予想をボラティリティ・スマイル（スキュー）
　として反映することができる

・以上の点から、確率ボラティリティモデルは実際のマーケットを表現する、
　より現実的なモデルであるといえる。

今後のスケジュール

- 最終報告が終了したので、1月半ばごろを予定している提出に向け論文の執筆を進めていく。



参考文献

・ジョン　ハル 『フィナンシャルエンジニアリング　第7版』 三菱UFJ証券市場商品本部訳、社団法人金融財政事情研究会、2009年
・伊藤敬介他 『新・証券投資論Ⅱ　実務篇』 日本証券アナリスト協会編、日本経済新聞社、2009年
・石村貞夫他 『ブラックショールズ微分方程式』 東京図書、1999年
・石村園子 『やさしく学べる微分積分』 共立出版株式会社、1999年
・宮崎浩一 『オプション市場分析への招待』 森平爽一郎他編集、朝倉書店、2009年
・公益社団法人日本証券アナリスト協会 『証券分析とポートフォリオ・マネジメント　第2回　計量分析と統計学（1）』 株式会社太平社、2012年
・佐藤茂 『オプション取引入門　基本理論と戦略』 ダイヤモンド社、2013年