



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

## 債券と株式の相関関係を考慮した場合の 銀行の株式保有について

— ポートフォリオ理論にもとづくアプローチ —

菅和聖\*

kazutoshi.kan@boj.or.jp

福田善之\*\*

yoshiyuki.fukuda@boj.or.jp

杉原慶彦\*\*\*

No.13-J-1  
2013年1月

日本銀行  
〒103-8660 郵便事業（株）日本橋支店私書箱第30号

\* 金融機構局

\*\* 国際局（元・金融機構局）

\*\*\* 総務人事局（元・金融機構局）

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行情報サービス局 (post.prd8@boj.or.jp) までご相談下さい。転載・複製を行う場合は、出所を明記して下さい。

# 債券と株式の相関関係を考慮した場合の銀行の株式保有について\*

## — ポートフォリオ理論にもとづくアプローチ —

菅 和聖<sup>†</sup>・福田 善之<sup>‡</sup>・杉原 慶彦<sup>§</sup>

2013年1月

### 【要旨】

本稿では、金融資本市場における金利リスクと株式リスクの相関関係を考慮した場合の銀行の株式と債券の最適な資産構成比率を、ポートフォリオ・モデルによって分析している。本分析によると、わが国における資産構成比率の決定には、金利ボラティリティよりも、金利と株価の相関係数と株価ボラティリティが重要な役割を果たすことが明らかになった。また現状では、わが国の多くの金融機関において、株式の保有比率がモデルから試算される水準よりも高いとの結果を得た。株価ボラティリティの増大や金利と株価の相関関係が反転するなど市場に過度のストレスがかかる場合、株式の保有比率は、モデルから得られる水準よりもさらに過大になると評価される。

---

\* 本稿の作成過程で、Alistair Milne 教授（英ラフバラー大学）、日本銀行のスタッフから有益なコメントを頂戴した。また、本稿の作成にあたっては、三澤里実の協力を得た。この場を借りて、深く感謝の意を表したい。ただし、ありうべき誤りは筆者に属する。本稿の内容と意見は、筆者ら個人に属するものであり、日本銀行および金融機構局の公式見解を示すものではない。

<sup>†</sup> 日本銀行金融機構局 (kazutoshi.kan@boj.or.jp)

<sup>‡</sup> 日本銀行国際局（元・金融機構局）(yoshiyuki.fukuda@boj.or.jp)

<sup>§</sup> 日本銀行総務人事局（元・金融機構局）(yoshihiko.sugihara@boj.or.jp)

## 1. はじめに

銀行は、債券、株式、貸出などの様々な資産を保有することで収益を上げているが、同時に、これらの資産の価格変動に伴うリスクにも直面している。その際、わが国銀行の保有が多い株式のリスク管理については特に注意する必要がある。わが国では2000年代を通じて保有株式の削減が進められてきたものの金融機関の株式保有残高は依然として大きく、株式リスクが銀行経営の大きなリスク要因となっている（図1、図2）。

2000年代以降の日本では、金利リスクと株式リスクは弱いながら逆相関しており、銀行は株式と債券を同時に保有することで、リスク・ヘッジ効果を楽しんでいたと考えられる（図3）。すなわち、金利が上昇する局面では債券評価損が生じる一方、株式については評価益が生じ、両者の損益が相殺する場面が多かった。こうした資産間のリスク・ヘッジ効果が働くと、個別のリスクから想定されるよりもポートフォリオ全体の損失は抑制されることになる。一方で、平成バブル崩壊期の1990年代の日本や、ソブリンリスクへの懸念が高まった2011年末頃のイタリアでは、株価が大幅に下落すると同時に債券金利が上昇（株価と債券価格が同時に下落）する局面がみられる（図4）。この場合には、金利リスクと株式リスクが順相関となり、両者とも損失が発生するため、個別のリスクから想定される以上の損失が発生することになる。こうした事例は、各資産のリスクをばらばらに評価して単純に足し上げるだけでは、銀行が直面する総合リスクを過小評価あるいは過大評価してしまう恐れがあることを示している。このため、銀行は資本制約のもとで、資産間のリスクのバランスを取りながら収益を最大化するように資産構成を決定するという難しい問題に直面することになる。

資産構成（ポートフォリオ）の最適化問題を考察した研究は、Markowitz（1959）を初めとして古くから数多く存在する。特に、債券と株式の混合ポートフォリオを分析対象とする研究としては、Konno and Kobayashi（1997）、Fischer and Roehrl（2003）などが挙げられる。Konno and Kobayashi（1997）は、債券と株式からなる大規模ポートフォリオの最適アロケーションをシミュレーションによって導出している。Fischer and Roehrl（2003）は、ポートフォリオ選択問題を設定する際に、期待ショート・フォールやRORACなど複数の最適性の基準を考慮し、それぞれのパフォーマンスをシミュレ

ーションによって比較分析している<sup>1</sup>。

本稿の目的は、ポートフォリオ・モデルに基づき、銀行が資本制約に直面する場合において、収益が最大となる債券と株式の最適な資産構成比率を求めることである。その際、わが国の株式リスクと金利リスクの相関関係を明示的に考慮している。さらに本稿では、資産構成比率が市場環境にかかるストレスによって、どのように変化するかについても分析を行っている。金融危機時など、市場にストレスが生じる場合には、株価の急落や、金利と株価の相関関係が逆転して株式保有と債券保有のヘッジ効果が失われるといったことが起こり得る。こうした場合には、最適な資産構成比率も変化することになる。

本稿の構成は以下の通りである。2章では、銀行における、債券と株式の保有比率に関する最適化行動を説明する。ここでは、債券と株式の相関関係が明示的に考慮されている。3章では、推計されたモデルから得られる定性的な結果を示す。4章では、実際のデータとモデルによる結果を比較し、金融機関の株式保有比率が資本バッファ一対比で適切かどうかについて評価を試みる。5章は、結論と今後の課題である。

## 2. 分析手法

### (1) モデルの設定

分析では、株式と債券の2商品から構成されるポートフォリオ・モデルを想定する<sup>2</sup>。このうち、債券ポートフォリオについては、銀行はデュレーション $D$ の債券を売買するものとする。また銀行は、株式リスクと金利リスクから成るポートフォリオの総合リスク量を資本制約に応じて一定のリスク許容水準以下に抑制しつつ、ポートフォリオの収益の最大化するように、株式と債券の保有比率を決定する。

現時点を0として、投資期間を $T$ とすれば、銀行の投資戦略は

---

<sup>1</sup> RAROC (Risk Adjusted Return On Capital : リスク調整後資本収益率) とは、配賦資本に対する収益力を示す指標であり、「経費控除後利益/経済資本」として算出される。ここでいう経済資本は、リスク量を指す場合もあれば、許容できるリスク量の上限を指す場合もある。

<sup>2</sup> 銀行の主要な保有資産は、貸出、債券、株式の3種類が代表的なものである。本稿の分析では、銀行は貸出を先に決定すると想定している。その上で、残った資産をどのように債券と株式に振り分けるかという問題を取り扱っている。

$$\max_{\{w\}} \mathbf{E}_0 \left[ w_1 \left( \frac{B_{T,D} + c_{0,D}T}{B_{0,D}} - 1 \right) + w_2 \left( \frac{S_T}{S_0} - 1 \right) \right], \quad (1)$$

s.t.

$$\mathbf{V}_0[\phi_T] \leq \gamma, \quad \gamma > 0 \quad (2)$$

$$w_1 + w_2 = 1 \quad (3)$$

と表現できる<sup>3</sup>。ここで $\mathbf{E}_0[\cdot]$ 、 $\mathbf{V}_0[\cdot]$ はそれぞれ時刻 0 における期待値と分散を表す。 $B_{T,D}$ 、 $S_T$ はそれぞれ時刻 $T$ における債券、株式のポートフォリオの価値、 $\phi_T \equiv w_1((B_{T,D} + c_{0,D}T)/B_{0,D} - 1) + w_2(S_T/S_0 - 1)$ は時刻 0 から $T$ までのポートフォリオからの収益率、 $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ は債券・株式への投資ウェイト、 $c_{0,D}$ は満期 $D$ の債券のクーポン額を表す<sup>4</sup>。 $\gamma$ は外生的に与えられる銀行が最大限許容するポートフォリオの分散（ボラティリティ）である。なお、株式ポートフォリオの価値には配当が含まれるものとする。一方、債券ポートフォリオのクーポンは、投資期間の最終日にまとめて支払われるものとする。

ここで、債券と株式のポートフォリオ価値である $B_{t,D}$ および $S_t$ については、次の確率プロセスに従うと仮定する。

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_s S_t dW_t^{(1)} \quad (4)$$

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^{(2)} \quad (5)$$

$$dB_{t,D} = -D \cdot B_{t,D} dr_t \quad (6)$$

$$dW_t^{(1)} \cdot dW_t^{(2)} = \rho dt \quad (7)$$

ここで、 $W_t^{(1)}$ 、 $W_t^{(2)}$ はブラウン運動、 $r_t$ は満期までの期間 $D$ の金利（ $D > 0$ ）を表す。

---

<sup>3</sup> 問題設定では、 $w_1, w_2 \geq 0$ との制約条件は加えていない。すなわち、株式や債券のショートポジションを取ることができるとの設定で評価を行っている。ただし、こうした非負制約を加えた場合でも、 $w_1, w_2 \geq 0$ の条件が満たされる範囲内では両者の解は一致することから、両者の設定に本質的な違いはない。

<sup>4</sup> 問題設定では、リスク量として有価証券ポートフォリオの分散を用いたが、実際の銀行は、バリュエーション・アット・リスクのような損益分布の分位点でリスク評価を行っていると考えられる。ただし、債券価格や株価の変動が正規分布に従う場合には、ポートフォリオの分散と分位点で評価したリスク量が比例関係にあることから、(1)式による問題設定は現実の銀行の行動を模した設定と解釈できる。

また、 $\mu$ は配当込みの株式の期待収益率、 $\sigma_s$ は株式ポートフォリオのボラティリティ、 $\kappa$ は金利の平均回帰速度、 $\theta$ は金利の平均回帰水準、 $\sigma_r$ は債券ポートフォリオの金利ボラティリティ、 $\rho$ はブラウン運動の相関係数を表す。(6)式から分かるように、債券ポートフォリオ価値の変化についてはイールドカーブの平行シフトの影響のみを考慮するものとする（イールドカーブの傾きや曲率が変化する影響は考慮しない）<sup>5, 6</sup>。なお、(5)式はスポット・レートの変動を表すモデルとして開発されたものであるが、本稿では債券のデュレーションを固定した分析を行うことから、こうしたスポット・レートのモデルによって国債金利の変動を表現している<sup>7</sup>。

## (2) 最適な資産保有比率

上記の設定のもとで、(1)～(3)式の解は次の通りとなる。

$$\begin{cases} w_1 = \frac{c-b-\sqrt{b^2-ac+\gamma(a-2b+c)}}{a-2b+c} \\ w_2 = \frac{a-b+\sqrt{b^2-ac+\gamma(a-2b+c)}}{a-2b+c} \end{cases} \quad (8)$$

ただし、

$$a = \mathbf{V}_0[B_{T,D}/B_{0,D}] = X^2 Y^2 (Y^2 - 1) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} b &= \mathbf{Cov}_0[B_{T,D}/B_{0,D}, S_T/S_0] \\ &= XY e^{\mu T} \left( \exp\left(\frac{-D\rho\sigma_s\sigma_r}{\kappa}(1 - e^{-\kappa T})\right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>5</sup>  $B_{t,D}$ が $r_t$ の関数である場合、伊藤の補題から、 $dB_{t,D} = -D \cdot B_{t,D} dr_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_{t,D}}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 dt$ となる。債券価格に対する金利の2次以上の変化の影響を無視すると、 $\partial^2 B_{t,D} / \partial r_t^2 = 0$ となるので、(6)式が得られる。金利が大きく変動する場合には、2次以上の変化の影響を無視しえないと考えられるが、ここでは簡便的に1次の変化のみを考慮する。

<sup>6</sup> (6)式がイールドカーブの平行シフトのみを考える理由は以下の通りである。1個のキーレート $\{r_i\}_{i=1}^I$ とキーレート・デュレーション $\{D_i\}_{i=1}^I$ を考え、銀行がそれぞれのデュレーションの債券に $\omega_i$ だけ投資している場合には、債券ポートフォリオの平均デュレーション $D$ は $D = \sum_{i=1}^I D_i \cdot \omega_i / \sum_{i=1}^I \omega_i$ となる。一方、債券ポートフォリオの価値 $B = \sum_{i=1}^I \omega_i$ の変化は、債券価格に対する金利の2次以上の変化の影響を無視すると、 $dB = -\sum_{i=1}^I D_i \cdot \omega_i dr_i$ となる。このため、イールドカーブが平行シフトする場合には、 $dr_i = dr$  ( $\forall i$ )であるから、 $dB = -D \cdot B dr$ となり、(6)式の関係が成立する。

<sup>7</sup> 図3に示した金利の動きをみると、2000年以降、概ね平均回帰的な挙動が観察されることから、金利を(5)式のような平均回帰過程で表現することは妥当であると考えられる。

$$c = \mathbf{V}_0[S_T/S_0] = e^{2\mu T}(e^{\sigma_s^2 T} - 1) \quad (11)$$

ここで、

$$X = \exp\left(-D(e^{-\kappa T} - 1)(r_0 - \theta) - \frac{1}{2}D^2\sigma_r^2 T\right) \quad (12)$$

$$Y = \exp\left(\frac{D^2\sigma_r^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa T})\right) \quad (13)$$

である（導出過程の詳細については補論を参照）。したがって、パラメータを決定することで、(8)式から最適な株式保有比率は、 $\gamma$ （ポートフォリオの分散）を決めることで、解析的に一意に求まることになる<sup>8</sup>。

### （3）パラメータ設定

パラメータは、カリブレーションと最尤法を用いて設定している。また特定のパラメータ（ $\sigma_s$ 、 $\sigma_r$ 、 $\rho$ ）については、2000年初以降のサンプルを用いて推計したベンチマークと金融市場がストレス下にある場合の2つのケースについて値を設定する<sup>9</sup>。こうすることで、特にストレス下において株式保有比率がどのように変化するかを評価できる。

#### イ．カリブレーション

幾つかのパラメータについてはデータなどから外生的に定めている。銀行の投資期間 $T$ は外生的に1年（ $T = 1$ 年）とする。債券ポートフォリオのデュレーション $D$ は2011年3月末時点の実績値を用いて、大手行で2.6年、地域銀行で3.9年とする。債券ポートフォリオのクーポン水準は満期がデュレーションに近い新発債の金利水準と一致するように設定する（ $c_{0,D} = B_{0,D}r_0$ ）。株価ポートフォリオの期待収益率 $\mu$ は、過去30年間の平均値とする（ $\mu = 7.77\%$ ）<sup>10</sup>。相関係数 $\rho$ については、2000年初以降の株価収

<sup>8</sup>  $\gamma$ あるいはボラティリティ等の水準によっては、最適保有比率が虚数となり導出されないことがある。これは、足許の債券等の保有額がそのボラティリティに対して大きすぎるために株式の保有比率をどのように設定してもポートフォリオのリスク量が $\gamma$ を上回ってしまう場合に発生する。

<sup>9</sup> 株式保有比率に対する $\mu$ 、 $\kappa$ 、 $\theta$ の影響は、ボラティリティや相関の影響と比較して、ベンチマークとストレス下で大きく変わらない。

<sup>10</sup> 過去10年間に実現した平均的な株価収益率を算出すると、マイナスの値となるため、最適

益率と金利変化幅から推計した平均的な相関係数 0.33 をベンチマークのパラメータとする。また、相関係数については、バブル崩壊後の株価と金利が同時に下落した時期の相関係数-0.63 をストレス下のパラメータとする（図 3）。

#### ロ. パラメータ推計

まず、債券ポートフォリオについては、(5)式から、金利の平均と分散がそれぞれ

$$\mathbf{E}_0[r_t] = e^{-\kappa t}(r_0 - \theta) + \theta \quad (14)$$

$$\mathbf{V}_0[r_t] = \frac{\sigma_r^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}) \quad (15)$$

となる正規分布に従うものとする。サンプル数を  $N$  とすると、債券ポートフォリオの対数尤度  $L_B$  は

$$L_B = -\frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{N}{2}\ln\left(\frac{\sigma_r^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\tau})\right) - \frac{\kappa}{\sigma_r^2(1 - e^{-2\kappa\tau})}\sum_{i=1}^N (r_{i\tau} - e^{-\kappa\tau}(r_0 - \theta) + \theta)^2 \quad (16)$$

となる。ここで、 $\tau$  はサンプルの時間間隔であり、 $\tau = 1/250$  と設定する。 $\kappa$ 、 $\theta$ 、 $\sigma_r$  は、 $L_B$  を最大化するパラメータとして推定される。

株式ポートフォリオについては、(4)式から平均と分散がそれぞれ

$$\mathbf{E}_0\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right] = \left(\mu t - \frac{\sigma_s^2 t}{2}\right) \quad (17)$$

$$\mathbf{V}_0\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right] = \sigma_s^2 t \quad (18)$$

となる対数正規分布に従うものとする。株式ポートフォリオの対数尤度  $L_S$  は

$$L_S = -\frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{N}{2}\ln(\sigma_s^2\tau) - \frac{1}{2\sigma_s^2\tau}\sum_{i=1}^N \left(\ln\left(\frac{S_{i\tau}}{S_{i\tau-1}}\right) - \left(\mu\tau - \frac{\sigma_s^2\tau}{2}\right)\right)^2 \quad (19)$$

---

化問題の解が銀行の現実的な投資行動を描写しなくなってしまう。現実的には、投資家が想定している本来の株価期待収益率はこの水準よりも高いと考えられることも踏まえて、本分析では、過去 30 年間の長期平均値を採用した。



となる。この場合には、 $\sigma_s$ および $\mu$ に関する偏微分値がゼロとなる値として、

$$\mu = \frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N \ln \left( \frac{S_{i\tau}}{S_{i\tau-1}} \right) + \frac{\sigma_s^2}{2} \quad (20)$$

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N \left( \ln \left( \frac{S_{i\tau}}{S_{i\tau-1}} \right) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \ln \frac{S_{i\tau}}{S_{i\tau-1}} \right) \right)^2 \quad (21)$$

となる（基本統計量は表1を参照）。

推計では、金利 $r_t$ のデータとして、ブルームバーグ社が算出した3年物の新発債券金利のコンポジット指数を用いる（推定に用いるサンプルの基本統計量については表1を参照）。株価の市場ポートフォリオのデータとしてはTOPIXを用いる。

また、パラメータのうち $\theta$ 、 $\kappa$ 、 $\sigma_s$ 、 $\sigma_r$ については、2000年初～2011年11月末の日次データを用いて推計を行う。特に $\sigma_s$ 、 $\sigma_r$ 、 $\rho$ については、ベンチマークとストレス下にある場合の2つのケースについてパラメータを推計する。ベンチマークのパラメータについては、全サンプルを用いた推計結果を推計値とする。また、ストレス時のパラメータについては、1年間のウィンドウでローリング推計を行いボラティリティ $\sigma_s$ 、 $\sigma_r$ が最大になる時点、相関係数 $\rho$ が最小になる時点の推計結果をそれぞれの推計値とする。

表2は推計結果を示している。金利の平均回帰水準 $\theta$ は0.45%、金利の平均回帰速度 $\kappa$ は0.52と推計される。株価のボラティリティ $\sigma_s$ はベンチマークでは23.1%と推計される。ストレス下のパラメータとしては、リーマン・ショック時に、株価のボラティリティが42.4%まで上昇する。金利のボラティリティ $\sigma_r$ は、ベンチマークでは0.30%と推計され、ストレス下ではリーマン・ショック時に推定値が0.49%に上昇する。

### 3. 銀行部門全体における評価

#### (1) ベンチマークにおける株式保有比率と分散

図5は、ベンチマークのパラメータのもとでの大手行と地域銀行の株式保有比率と

ポートフォリオ全体の分散の関係を示している。縦軸は分散 $\sqrt{\gamma}$ 、横軸は株式の最適な保有比率 $w_2^*$ を表す。

結果をみると、第一に、株式保有比率と分散の間には非線形性があることがわかる。これは、(8)式において解析的に求められた分散 $\sqrt{\gamma}$ と株式保有比率 $w_2^*$ が2次級数の関係にあるためである。株式保有比率が上昇するとき、銀行のポートフォリオの分散は加速度的に大きくなる。第二に、地域銀行では債券投資の平均デュレーションが長く、債券保有に伴うリスク量が大きいことから、株式保有比率が低い場合には、地域銀行のポートフォリオの分散が大手行よりも大きくなっている。第三に、株式保有比率が10%程度まで上昇すると、大手行と地域銀行のポートフォリオの分散の差は縮小する。株式保有が増加すると、債券保有にかかる金利リスク量に割り当てることができる自己資本額が減少するため、債券保有が減少する。このため、特に地域銀行では債券投資に伴う分散がより大きく削減されることになる。なお、現在時点（2011年度上期末）では、地域銀行より大手行の株式保有比率が高いため、有価証券ポートフォリオのリスク量は大手行でより大きくなっている。

## (2) ポートフォリオの分散と金融機関のリスク量

上記では、株式保有比率と金融機関の有価証券ポートフォリオ全体の分散との関係をみてきた。ところで、ポートフォリオの分散の値を用いれば、一定の仮定に基づいて、金融機関が被る損失額を算出することが出来る。典型的には、VaRである。VaRは、ポートフォリオの収益率が正規分布に従うと仮定した場合、分散値を与えると、金融機関が一定の確率で被る損失額を算出することができる。これは、金融機関が抱えているリスク量とも言える。具体的には、ボラティリティを定数倍して、さらにポートフォリオの価値を乗じることによって算出される。ここでは、リスク量として99%VaRを想定しているので、正規分布の片側1%である2.33を乗じている。こうした仮定に基づくと、現在の株式保有比率のもとでは、確率1%で、大手行では5兆円超、地域銀行では2兆円超の損失が発生することになる（図中の縦線は、2011年度上期末の株式保有比率を示している）。

## (3) 金融市場の状況の違いが株式保有比率とリスク量に与える影響

本節では、金融市場の状況の違いが、株式保有比率とリスク量に与える影響について分析する。ここでは、金融市場の状況として、金利と株価収益率の相関係数 $\rho$ の低

下、株価のボラティリティ $\sigma_s$ の上昇、金利のボラティリティ $\sigma_r$ の上昇という3つの状況を想定する。図7から図12は、金利と株価収益率の相関係数、株価のボラティリティ、金利のボラティリティを連続的に変化させた場合の、現時点の株式保有比率に対する総合リスク量を示している。

図7、8は、相関係数が変化した場合のリスク量を示している。相関係数がマイナス方向に動くと株式保有による債券損失へのヘッジ効果がなくなり、株式損失と債券損失が同時に発生することからリスク量は増加する。例えば、相関係数がゼロになると株式保有に伴う債券損失のヘッジ効果が喪失することから、ベンチマークの場合よりもリスク量は大手行で0.6兆円程度、地域銀行で0.5兆円程度増加する。一方で、相関係数が危機時にみられるように-0.63へと反転する場合には、株式と債券のポートフォリオが同方向に変動するため、ベンチマークの場合と比較してリスク量が大手行で1.6兆円程度、地域銀行で1.2兆円程度増加することになる。

図9、10は、株価のボラティリティが上昇した場合のリスク量を示している。株価のボラティリティが上昇するほど、株式のリスク量が大きくなり、全体のリスク量を押し上げる。例えば、株価ボラティリティがリーマン・ショック時のレベルまで上昇すると、ベンチマークの場合と比較してリスク量が大手行で5兆円程度、地域銀行で2兆円程度増加する。

図11、12は、金利ボラティリティが上昇した場合のリスク量を示している。金利のボラティリティが上昇するほど、債券にかかるリスク量が大きくなることから、全体のリスク量は押し上げられる。ただし、その大きさは株式の場合と比べて小さいものとなっている。金利ボラティリティがストレス下でリーマン・ショック時のレベルまで上昇すると、ベンチマークの場合と比較してリスク量が大手行で0.1兆円程度、地域銀行で0.5兆円程度増加する。

以上の結果から、わが国では銀行の資産構成比率の決定に、金利ボラティリティよりも金利と株価の相関係数と株価ボラティリティが重要な役割を果たすことが分かる。したがって、銀行はリスク量が大きい株式を、より圧縮する必要があることが示唆される。

#### 4. 個別金融機関における評価

## (1) ベンチマークにおける評価

本節では、個別金融機関について、それぞれの自己資本制約に応じて、モデルから試算される株式保有比率と現実の株式保有比率を比較する。ここで、債券と株式に割り当てることができる各金融機関の自己資本額（＝資本バッファ）は、Tier I 資本から、規制上の自己資本所要額、信用リスク、オペレーショナル・リスク、外債保有リスクを差し引いたものとして定義した<sup>11</sup>、<sup>12</sup>。これは、中核資本が第一義的には銀行の主要業務である貸出に関わるリスクを吸収するために用いられると考えられるためである。外債保有リスクについては、本モデルで考慮していないため、先にそのリスク分を控除した。

図 13 は、横軸にモデルから試算された資本バッファから許容される株式保有比率と現実の株式保有比率の差を、縦軸に銀行数を示したものである。マイナスの値を示す銀行は、資本バッファが許容するよりも多くの株式を保有していることになる。全体では、およそ 2 割の銀行で資本バッファ対比過剰な株式保有がみられる。また大手行、地域銀行ともに、銀行によっては、資本バッファ対比で過剰な株式保有比率が 5% を超えるなど、かなり株式保有比率が高い先がみられる。

---

<sup>11</sup> 規制上の自己資本所要額は、国際基準行がリスク・アセットの 8%、国内基準行がリスク・アセットの 4% とした。信用リスク量は信頼水準 99% の非期待損失とし、銀行貸出における債務者区分データから算出したデフォルト確率と、銀行貸出における損失発生時の回収率を用いて推計している。外債保有リスク量は、信頼水準 99% の外国金利の VaR に債券の平均マチュリティを掛けて算出した。ここで、外国金利の VaR は、国際収支統計を用いて推計した邦銀の国別債券残高に基づき、各国通貨の 3 年物国債金利の VaR を加重平均して求めた。オペレーショナル・リスク量は業務粗利益の 15% とした。

<sup>12</sup> 本稿では、債券と株式に割り当てる資本バッファを計算する際に、銀行のレピュテーション・リスクを考慮し、規制上の自己資本所要量を控除している。仮に、銀行の有価証券ポートフォリオから多額の損失が発生し、自己資本比率が規制上の所要水準を下回れば、当該銀行に対して監督当局より早期是正措置が発動される。これにより、仮に当該銀行に対する信用不安が広がれば、預金の取り付け騒ぎなどの事態に発展するおそれがある。こうした事態は、銀行のレピュテーション・リスクが顕現化する例である。したがって、規制上の自己資本は、本来的な意味合いでは、テイル・リスクが顕現化した場合に備えた損失吸収力の備蓄であるが、現実的には金融環境の大きな悪化を伴う危機時においても規制水準を割り込まないことが重要である。

これらの結果は、ベンチマークの場合においても銀行によっては許容できるリスク量以上の株式リスクを抱えており、こうした銀行は今後さらに株式保有を減少させる必要があることを示している。

### (2) 金融市場の状況の違いがもたらす影響

金融市場の状況が変化し、ベンチマークの状況に比べて金利と株価収益率の相関係数 $\rho$ が低下、株価のボラティリティ $\sigma_s$ が上昇、金利のボラティリティ $\sigma_r$ が上昇した場合の資本バッファから許容される株式保有比率と現実の株式保有比率を比較する。

図 14、15、16 は、相関係数、株価のボラティリティ、金利ボラティリティについてそれぞれのパラメータを用いた場合の、資本バッファから許容される株式保有比率と現実の株式保有比率の差を示している。いずれの場合にも、ベンチマークの場合（図 13）と比較してより多くの銀行で資本バッファ対比過剰な株式保有がみられる。この結果は大手行、地域銀行ともに、市場環境が悪化する可能性を踏まえると、株式を相当程度削減する必要があることを示唆している。特に、大手行においては、保有株式の足もとの水準が高いことを映じて、株価のボラティリティが上昇するシナリオにおいて最も多くの銀行で株式保有比率が過剰となる。また、地域銀行では、債券のデュレーションが大手行対比長めであることを反映して金利と株価の相関係数が反転するシナリオにおいて、最も多くの銀行で株式保有比率が過剰となる。

### (3) 留意点

これまでの分析結果については、前提条件と関連して、いくつかの留意点がある。第一に、制約条件となっている資本量についてである。上記の試算では、貸出リスクに対応する自己資本量や規制自己資本を除いた自己資本量を、有価証券のポートフォリオに割り当てるという想定を行っている。こうした想定のもとでは、株式の保有比率は、保守的に算出されることになる。仮に、規制上の所要自己資本を控除せずに有価証券ポートフォリオのリスク量に割り当てた場合、当然、保有株式比率も高まることになる。しかし、実際に株価の下落などによって有価証券ポートフォリオの損失額が規制自己資本を割り込む場合、市場におけるレピュテーションが低下し、資金調達も困難化するなど、通常の業務が難しくなる可能性が高い。こうしたことを考慮して、上記試算では、有価証券に割り当てられるリスク量については、保守的な仮定を用いている。

第二に、金融機関のリスク管理との関係である。金融機関がリスク管理を行う場合、保有している各資産がストレス時に被り得る損失額を計算したうえで、それらを足し上げた値が、資本量の範囲内に収まっているかどうかをみている。これは、上記の分析でいえば、資産間の相関が最も高く、株式も債券も同時に最大の損失額が発生することを前提にリスク量を計算していることと同じである。そして、そのリスク量については、規制資本も含め、評価されている。したがって、先に述べた通り、本稿での分析は、規制資本量をあらかじめ控除したうえで、残余の資本量との対比で、どの程度株式保有が可能かどうかを計測している点で、保守的な資本使用を前提にしていることが、通常の金融機関のリスク管理手法と異なっている点である。

第三に、株式のリターンに関する前提についてである。本稿での分析では、株式のリターンとして、過去 30 年間の平均値 (7.77%) を用いている。しかし、最近時点でのリターン (過去 10 年間) を計算すると、平均値がマイナスとなるほか、予想配当率 (2011 年 3 月末時点) も 1.66% と、かなり低水準となる。このため、最近時点でのリターンを用いた場合には、株式保有比率は更に低くなる。一方、株式のリターンに、直接的なリターンだけでなく、政策保有株として得られる他の銀行業務からのメリットをどう考えるかという点も重要である。すなわち、企業の株式を長期保有することによって、当該企業から、長期かつ安定的に手数料収入や貸出利鞘を得られるというメリットは、株式から得られる直接的なリターンに上乗せされるべきものとの考え方があがる。もし、このリターンが実際に計測可能なものであれば、直接的なリターンに上乗せした上で、トータルリターンを計算し、それを用いて、最適な株式保有比率を算出することが可能になる。

## 5. 結論と今後の課題

本稿では、株式リスクと金利リスクの相関を考慮したポートフォリオ・モデルを用いて最適な資産構成比率を試算した。1990 年以降のパラメータの変動の範囲では、株価ボラティリティ、株価と金利の相関係数の変動が、金利ボラティリティよりも株式保有比率に対して大きな影響を与えることが分かった。また、銀行によっては、資本バッファから許容される株式保有以上に株式投資を行っている先がみられた。金融市場がストレス下にある場合には、こうした銀行の割合はさらに大きくなるとの結果を得た。

ここで、最後に本稿をより発展させていくための課題を2点提示しておきたい。1つ目の課題は、銀行のコア業務である貸出についても、他の資産との相関を考慮して分析することである。信用リスクも、株式や債券と同様に損失や収益の分布を持っており、他の2つのリスクと合わせて分析を行う必要がある。2つ目の課題は、静学的な最適化問題を解くだけでは銀行のリスク管理方法を厳密に表現できておらず、分析を動学的な問題に拡張する必要があることである。つまり、株価や金利は常に変動するものであり、これに応じてリスク・ヘッジ行動を取るはずである。こうした行動を折り込むことによって、上記の分析結果がどの程度変わりうるかについては、今後分析を深めていく必要がある。なお、その際、資産のリスクやリターンの計測を、どの期間で行うべきかという点にも留意する必要がある。

【参考文献】

Black, F. and Scholes, M., 1973, "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economics*, Vol. 81, pp. 637-659.

Fischer, T. and Roehrl, A., 2003, "Risk and performance optimization for portfolios of bonds and stocks," working paper.

Konno, H. and Kobayashi, K., 1997, "An integrated stock-bond portfolio optimization model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 21, pp. 1427-1444.

Markowitz, H., 1959, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Wiley, New York.

Vasicek, O., 1977, "An equilibrium characterization of the term structure," *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 177-188.

日本銀行、『金融システムレポート』、2012年4月。



## 補論．最適な株式・債券保有比率の導出

### 1．最適化問題

(1)式は(3)式を踏まえると、

$$\max_{\{w_2\}} \left[ w_2 \left( \mathbf{E}_0 \left[ \frac{S_T}{S_0} \right] - \mathbf{E}_0 \left[ \frac{B_{T,D} + c_{0,D}T}{B_{0,D}} \right] \right) + \mathbf{E}_0 \left[ \frac{B_{T,D} + c_{0,D}T}{B_{0,D}} \right] - 1 \right], \quad (22)$$

となる。したがって、株式ポートフォリオの期待収益率が債券ポートフォリオの期待収益率を上回る場合、すなわち、上式の括弧内が正である場合には、条件(2)式から、(22)式の解は、後述する二次方程式(24)についての解のうち大きい方となる。

$B_{T,D}/B_{0,D}$ および $S_T/S_0$ の分散をそれぞれ  $a$ 、 $c$ 、共分散を  $b$  とかくと、

$$\mathbf{V}_0[\phi_t] = \mathbf{w}^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mathbf{w} = \gamma \quad (23)$$

$$\Leftrightarrow (a - 2b + c)w_2^2 + 2(b - a)w_2 + a - \gamma = 0. \quad (24)$$

$a - 2b + c > 0$ であるから、上式の解は(8)式になる。

なお、本稿で設定しているパラメータから、(22)式の括弧内を算出すると、株式の配当が期間3年の国債金利を上回ることを主因に正值となる<sup>13</sup>。

### 2．株式と債券のサブポートフォリオの分散と共分散

次に、債券と株式のサブポートフォリオ価値 $B_{t,D}/B_{0,D}$ 、 $S_t/S_0$ の分散 $a$ 、 $c$ と共分散 $b$ を求める。

はじめに、債券ポートフォリオの分散  $a$  を導出する。(5)式より、

$$r_t = e^{-\kappa t}(r_0 - \theta) + \theta + \sigma_r \int_0^t e^{\kappa(s-t)} dW_s^{(2)}.$$

0から $t$ まで時間方向に積分すると、

$$\int_0^t r_s ds = \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} (r_0 - \theta) + \theta t - \frac{\sigma_r}{\kappa} \int_0^t (e^{-\kappa(t-u)} - 1) dW_u^{(2)} \quad (25)$$

<sup>13</sup> 本稿では、配当を除いた株価の期待収益率 $\mu$ がゼロであると仮定している。仮に株式の期待収益率が負である場合には、当該条件が満たされない可能性がある。この場合は、最適な株式保有比率はゼロあるいはマイナス（株式をショートすることが最適）となることがある。

一方、(5)式と(6)式より

$$d\ln B_{t,D} = -D\kappa(\theta - r_t)dt - D\sigma_r dW_t^{(2)} - \frac{1}{2}D^2\sigma_r^2 dt.$$

0 から  $t$  まで時間方向に積分すると、

$$\ln \frac{B_{t,D}}{B_{0,D}} = -D\kappa\theta t - \frac{1}{2}D^2\sigma_r^2 t + D\kappa \int_0^t r_s ds - D\sigma_r \int_0^t dW_s^{(2)}.$$

(25)式を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{B_{t,D}}{B_{0,D}} &= \exp\left(-\frac{1}{2}D^2\sigma_r^2 t - D(e^{-\kappa t} - 1)(r_0 - \theta) - D\sigma_r \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s^{(2)}\right) \\ &= X \cdot \exp\left(-D\sigma_r \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s^{(2)}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

$X$  は(12)式で定義される (ただし、ここでは投資期間  $T$  を  $t$  と表記したものとする。以下  $Y$  も同様)。ここで、(13)式で定義される  $Y$  を用いると、

$$\mathbf{E}_0 \left[ \exp\left(-D\sigma_r \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s^{(2)}\right) \right] = \exp\left(\frac{D^2\sigma_r^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})\right) = Y,$$

であるから、債券ポートフォリオの平均は、(26)式の期待値として

$$\mathbf{E}_0 \left[ \frac{B_{t,D}}{B_{0,D}} \right] = XY, \quad (27)$$

となる。また、

$$\mathbf{E}_0 \left[ \left( \frac{B_{t,D}}{B_{0,D}} \right)^2 \right] = X^2 \mathbf{E}_0 \left[ \exp\left(-2D\sigma_r \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s^{(2)}\right) \right] = X^2 Y^4, \quad (28)$$

であるから、(27)式および(28)式より、債券ポートフォリオの分散は、

$$a = \mathbf{V}_0 \left[ \frac{B_{t,D}}{B_{0,D}} \right] = X^2 Y^2 (Y^2 - 1), \quad (29)$$

となる。

次に、株式ポートフォリオの分散  $c$  を導出する。(4)式から、

$$\frac{S_t}{S_0} = \exp\left(\mu t - \frac{\sigma_s^2 t}{2} + \sigma_s \int_0^t dW_s^{(1)}\right), \quad (30)$$

であるから、

$$\mathbf{E}_0\left[\frac{S_t}{S_0}\right] = e^{\mu t}, \quad \mathbf{E}_0\left[\left(\frac{S_t}{S_0}\right)^2\right] = e^{(2\mu t + \sigma_s^2 t)}, \quad (31)$$

となる。これより  $c$  は、

$$c = \mathbf{V}_0\left[\frac{S_t}{S_0}\right] = e^{2\mu t}(e^{\sigma_s^2 t} - 1), \quad (32)$$

となる。

最後に、共分散  $b$  を導出する。(26)式および(30)式より、

$$\mathbf{E}_0\left[\frac{B_{t,D}}{B_{0,D}} \cdot \frac{S_t}{S_0}\right] = X \cdot \exp\left(\mu t - \frac{\sigma_s^2 t}{2}\right) \mathbf{E}_0\left[\exp\left(-D\sigma_r \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s^{(2)} + \sigma_s \int_0^t dW_s^{(1)}\right)\right]. \quad (33)$$

ここで、

$$\alpha_t = -D\sigma_r \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s^{(2)}, \quad \beta_t = \sigma_s \int_0^t dW_s^{(1)},$$

とおくと、

$$\mathbf{E}_0[\alpha_t] = 0, \quad \mathbf{E}_0[\beta_t] = 0, \quad \mathbf{V}_0[\alpha_t] = \frac{D^2 \sigma_r^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}), \quad \mathbf{V}_0[\beta_t] = \sigma_s^2 t$$

となる。また、

$$\mathbf{Cov}_0[\alpha_t, \beta_t] = -D\rho\sigma_r\sigma_s \left(\frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa}\right),$$

と計算されることから、

$$\mathbf{E}_0\left[\frac{B_{t,D}}{B_{0,D}} \cdot \frac{S_t}{S_0}\right] = X \cdot \exp\left(\mu t - \frac{\sigma_s^2 t}{2}\right) \exp\left(\mathbf{E}_0[\alpha_t + \beta_t] + \frac{1}{2}\mathbf{V}_0[\alpha_t] + \frac{1}{2}\mathbf{V}_0[\beta_t] + \mathbf{Cov}_0[\alpha_t, \beta_t]\right)$$

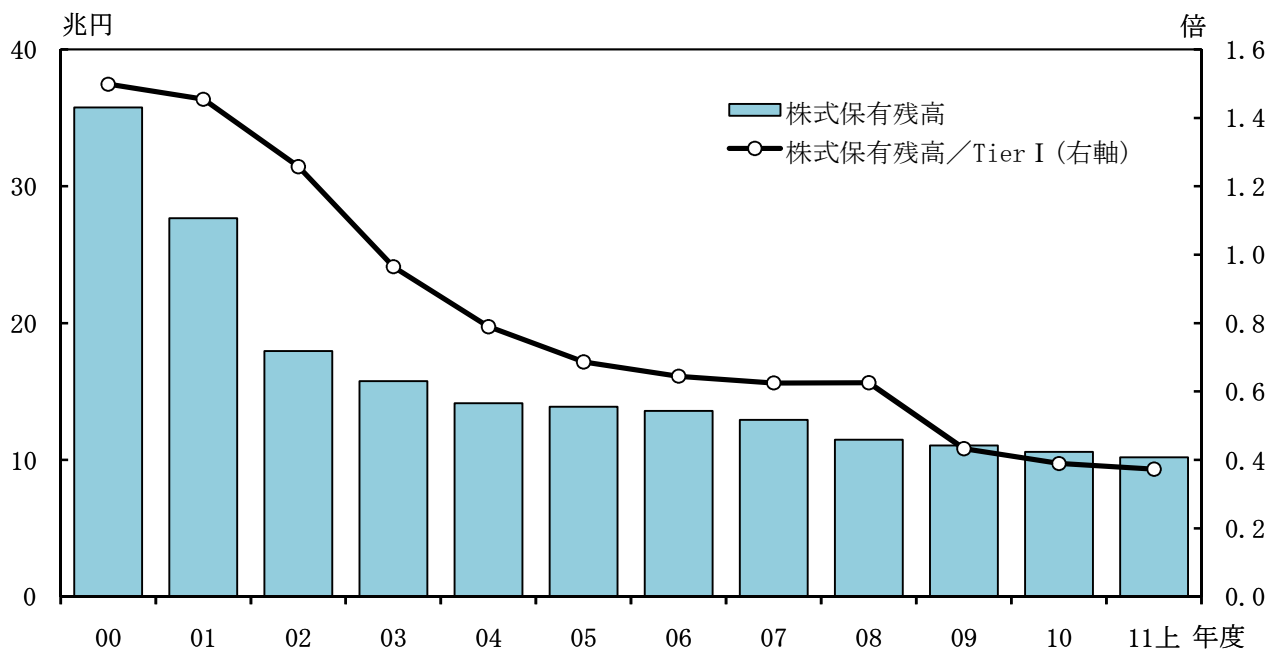
$$= XYe^{\mu t} \exp\left(-D\rho\sigma_r\sigma_s \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa}\right), \quad (34)$$

となる。(27)式、(31)式および(34)式より、

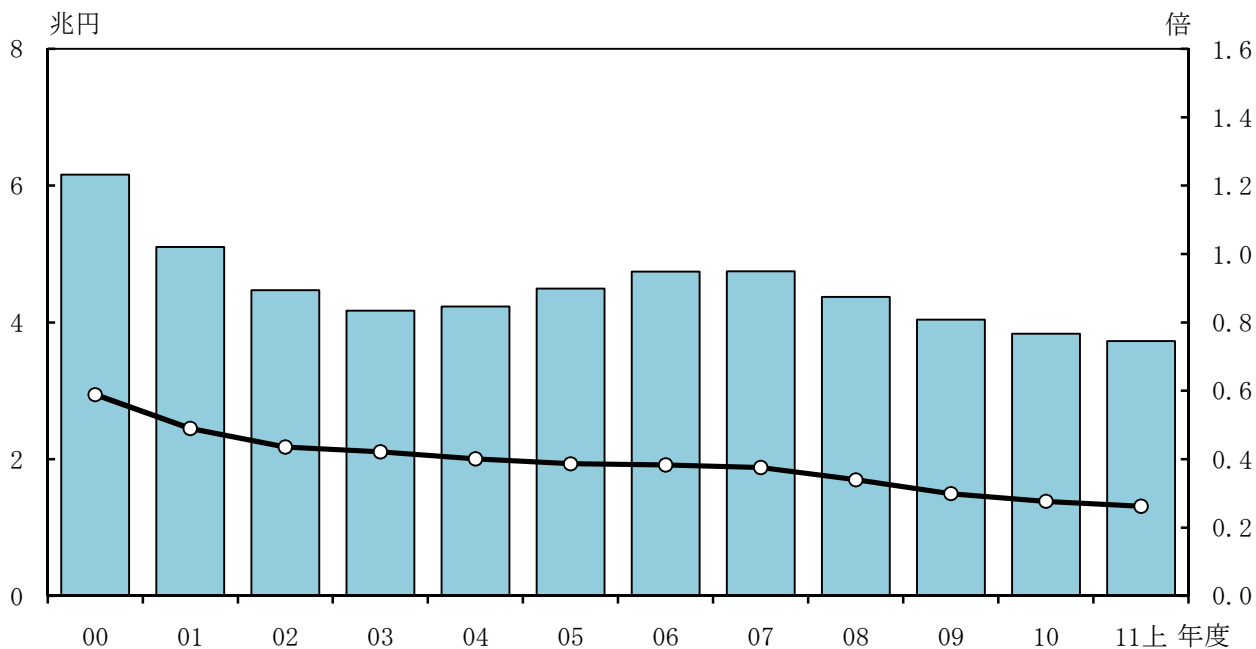
$$b = \mathbf{Cov}_0 \left[ \frac{B_{t,D}}{B_{0,D}}, \frac{S_t}{S_0} \right] = XYe^{\mu t} \left( \exp\left(-D\rho\sigma_r\sigma_s \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa}\right) - 1 \right). \quad (35)$$

# 株式保有残高

(a) 大手行



(b) 地域銀行

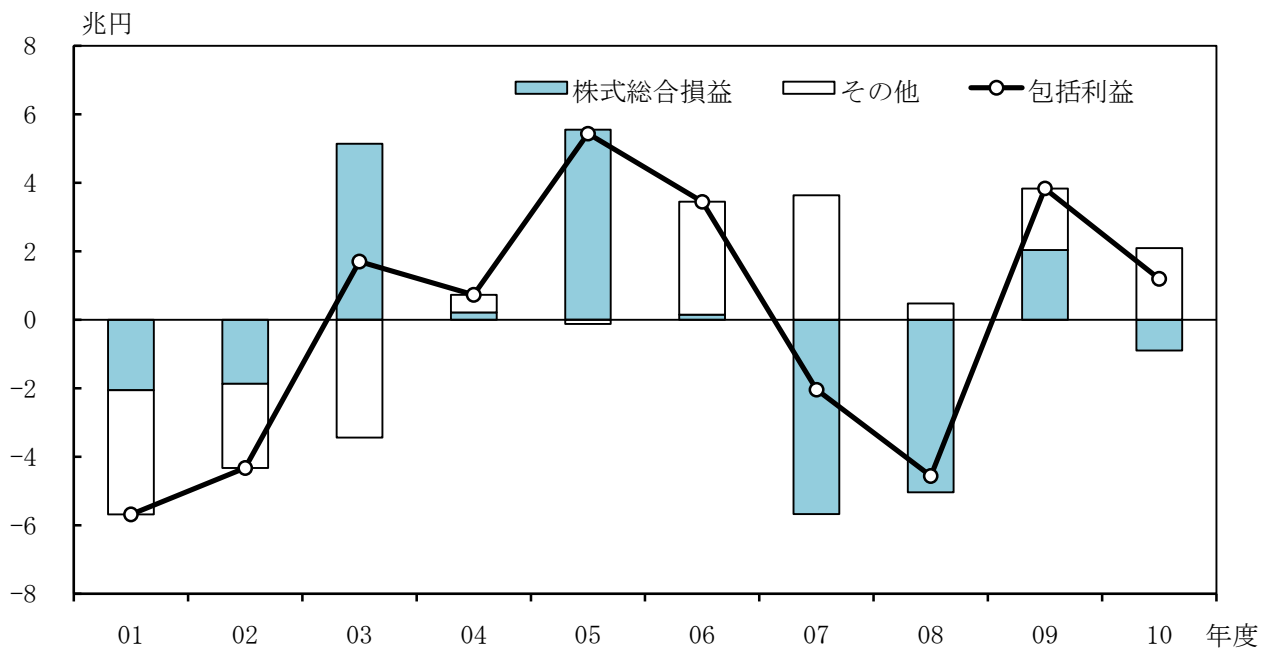


(注) 子会社・関係会社を除く。

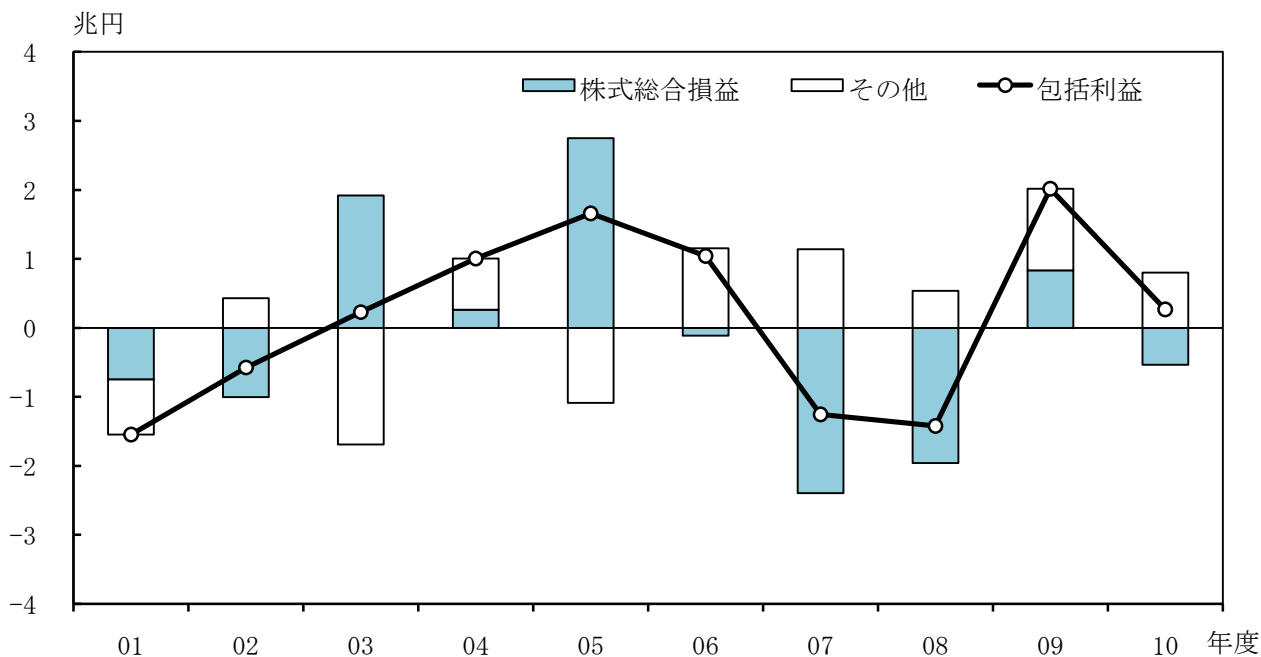
(資料) 日本銀行

# 包括利益

(a) 大手行



(b) 地域銀行

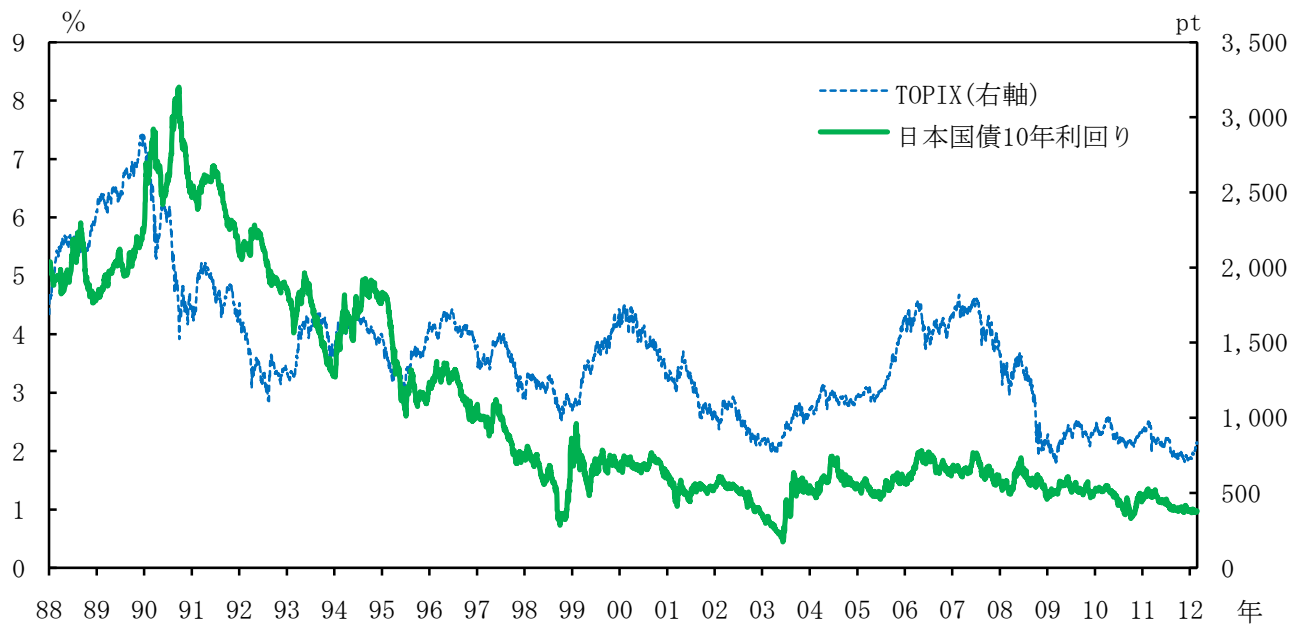


(注) 株式総合損益 = 株式3勘定戻×0.6+株式評価損益の増減。株式3勘定戻にかかる係数0.6は、繰延税金資産として計上できる額を控除するためのもの。

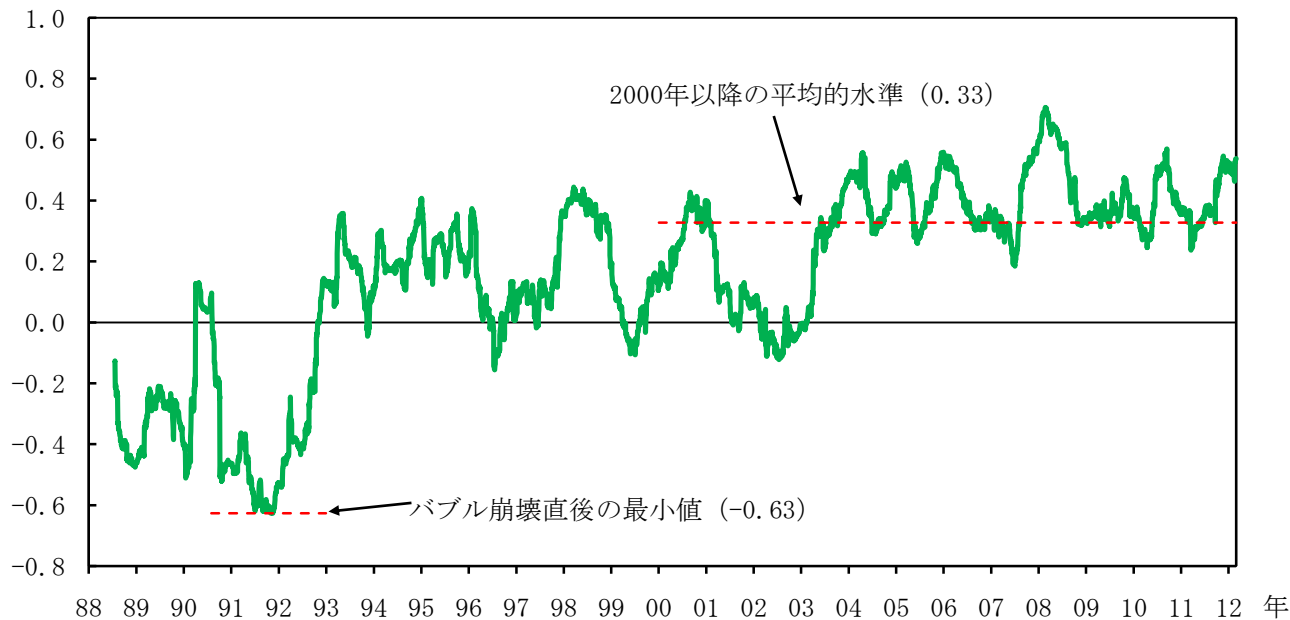
(資料) 日本銀行

## 日本の株価と金利の相関関係

(a) 株価と金利



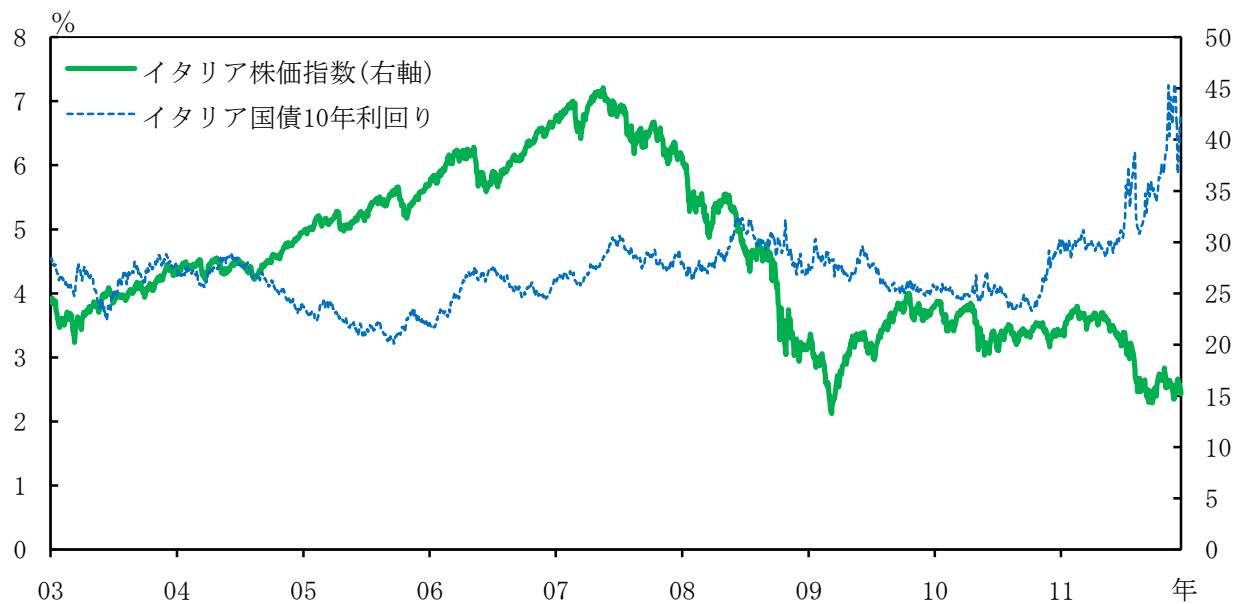
(b) 株価と金利の相関係数



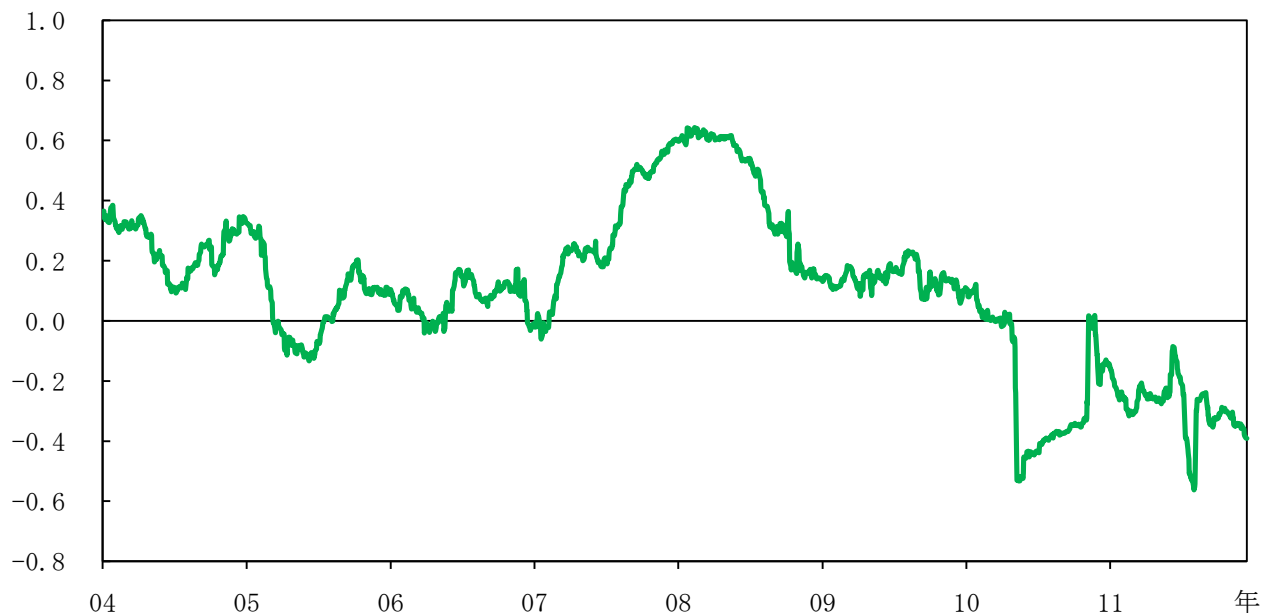
(注) 相関係数は、過去130日間のTOPIXの日次収益率と10年国債金利の日次変化幅をもとに算出。  
(資料) Bloomberg

## イタリアの株価と金利の相関関係

(a) 株価と金利



(b) 株価と金利の相関係数



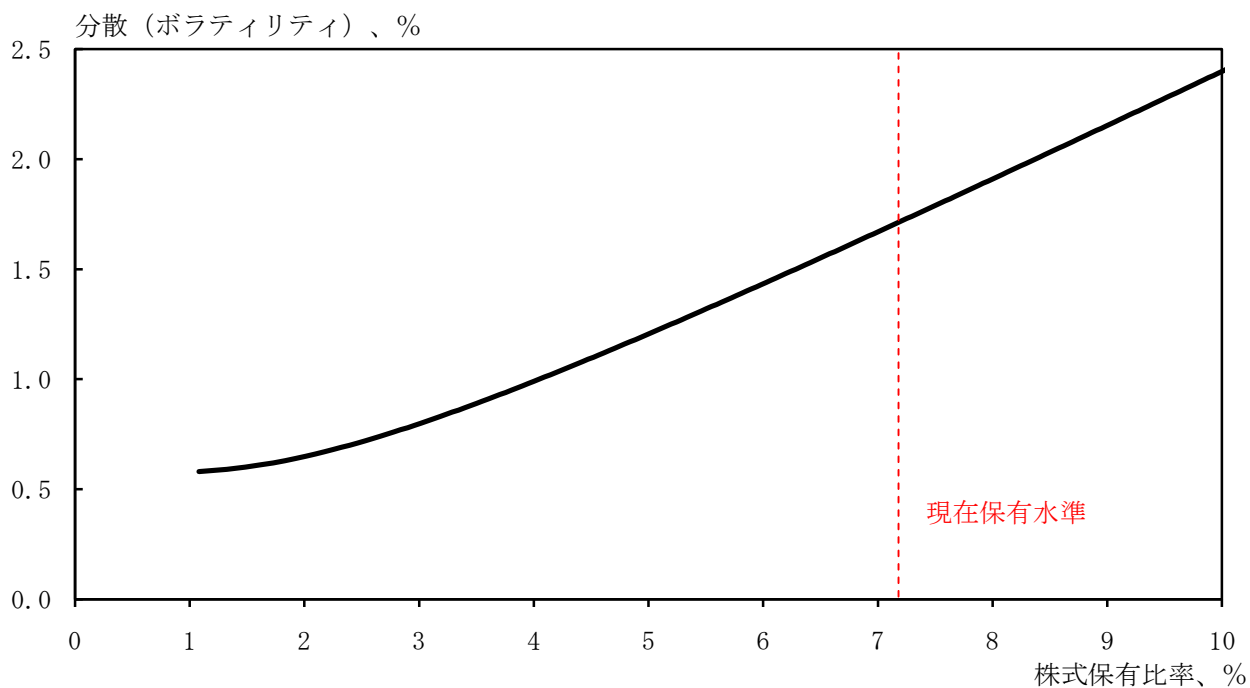
(注) 相関係数は、過去130日間のイタリア株価指数の日次収益率と10年国債金利の日次変化幅をもとに算出。

(資料) Bloomberg

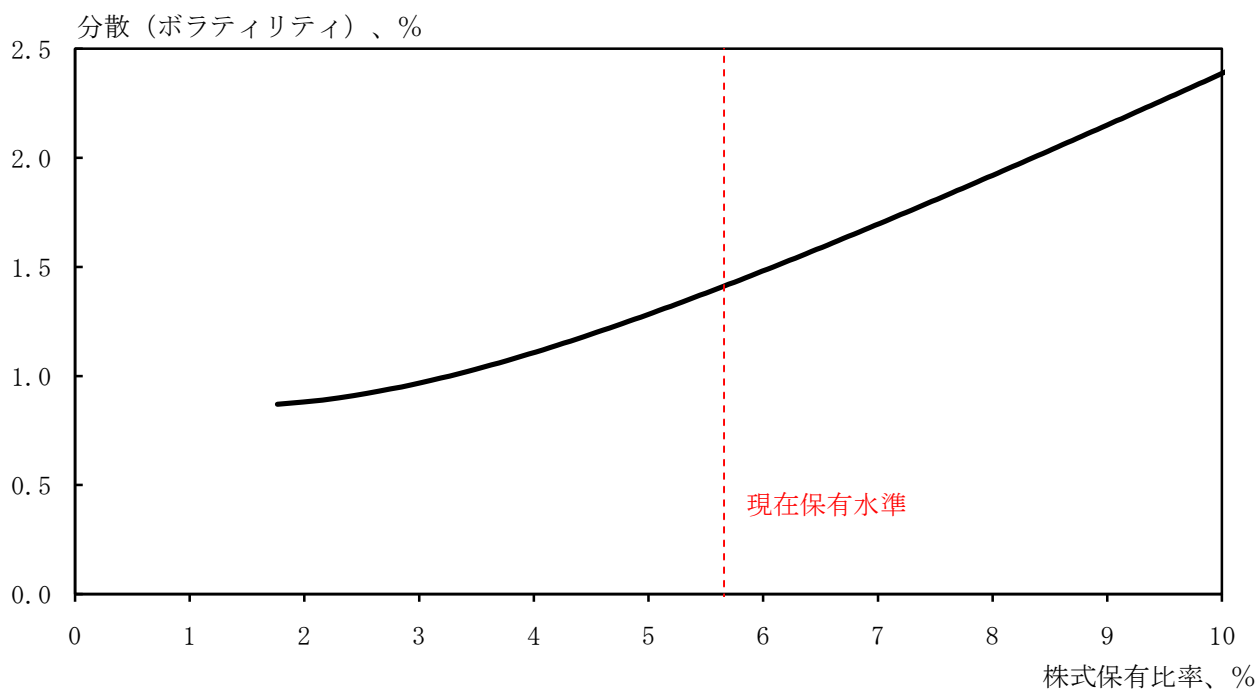


## ポートフォリオの分散と株式の最適保有比率

(a) 大手行



(b) 地域銀行

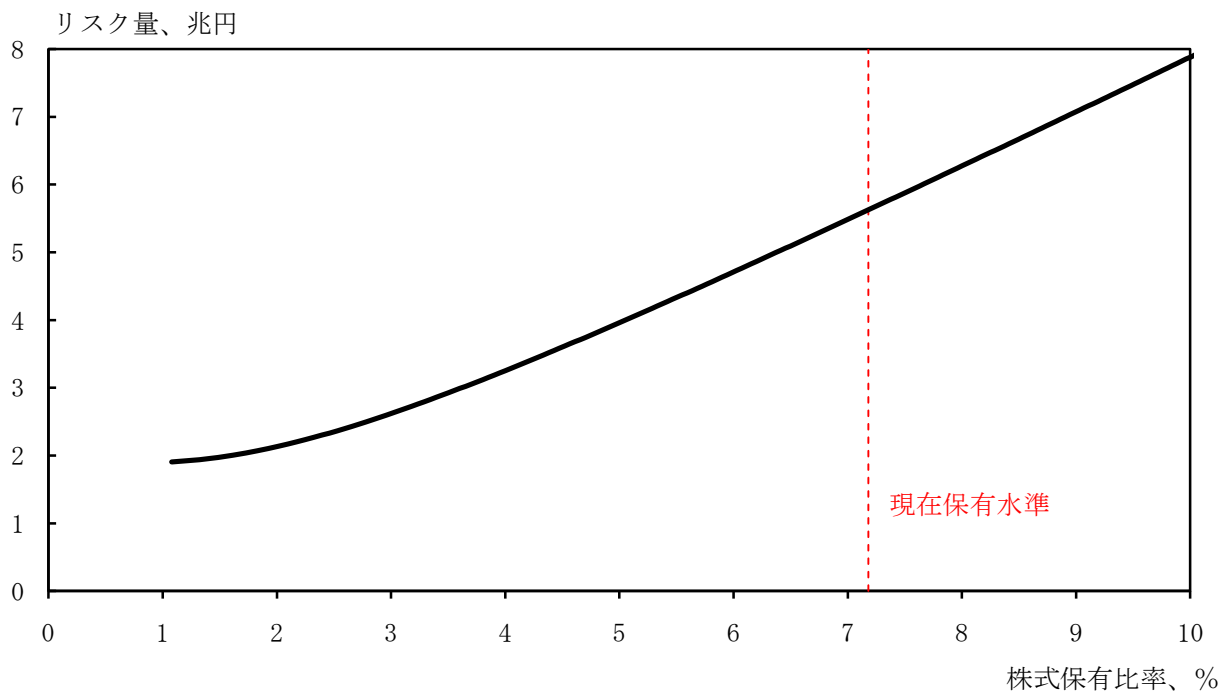


(注1) 債券ポートフォリオのデュレーションDは、大手行と地域銀行の2010年度末の実績値。

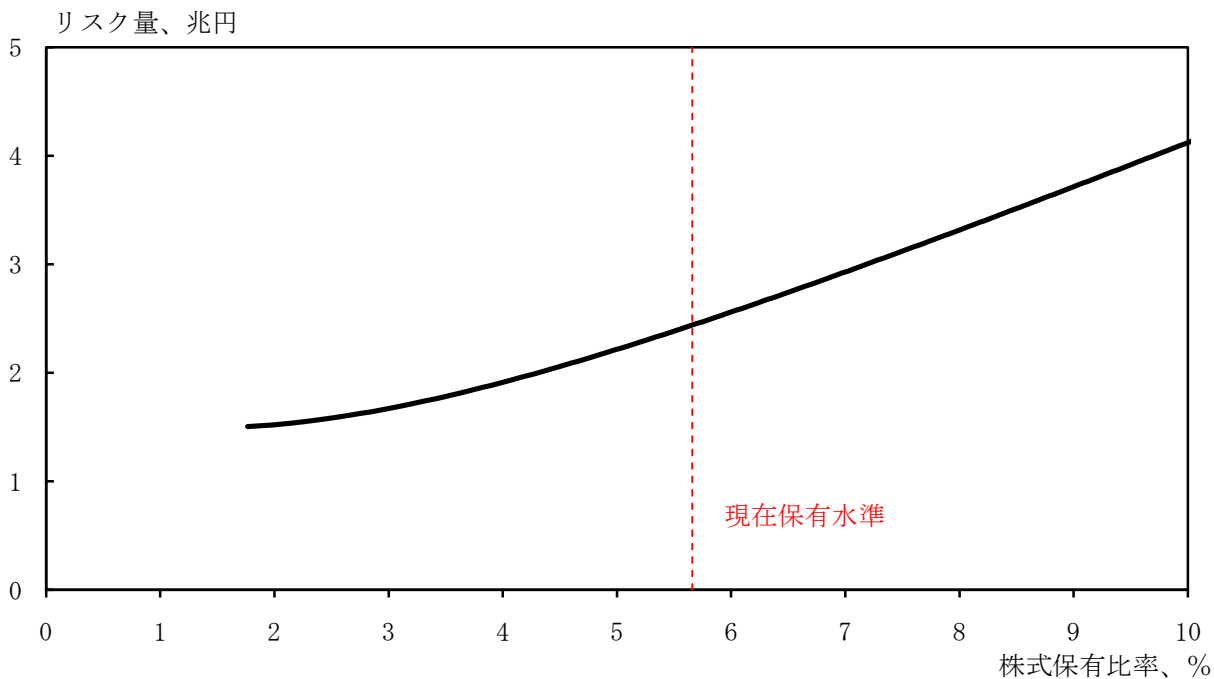
(注2) 株式保有率の現在保有水準は、2011年度上期末実績値。

# 1%ショック時の損失額（リスク量）と株式の最適保有比率

(a) 大手行



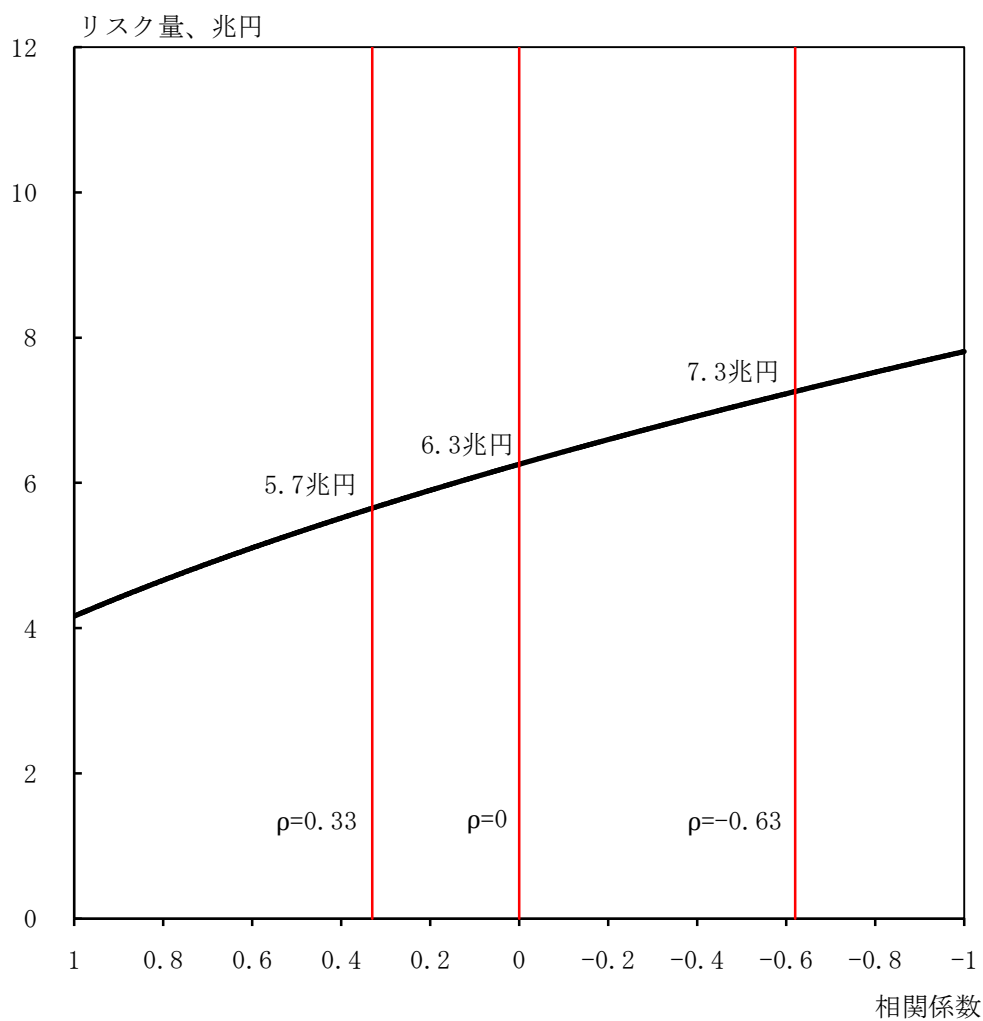
(b) 地域銀行



(注1) 債券ポートフォリオのデュレーションDは、大手行と地域銀行の2010年度末の実績値。

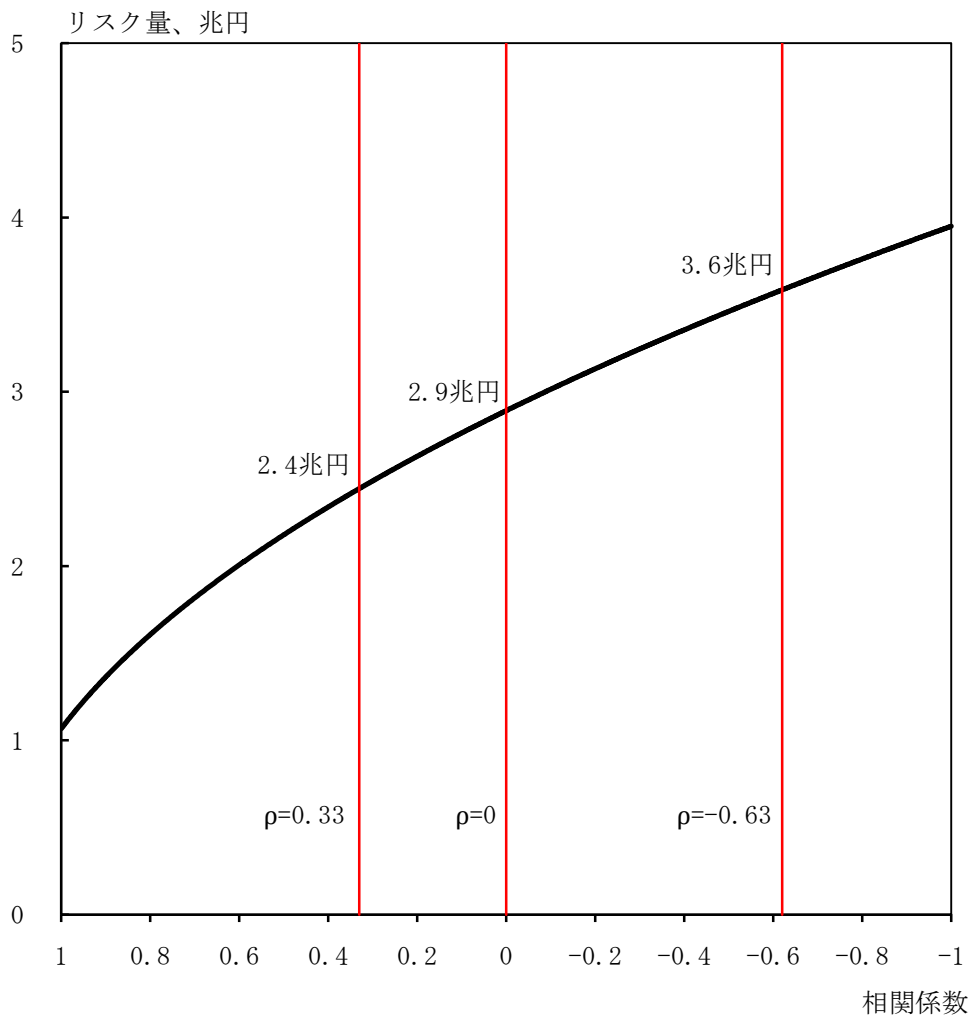
(注2) 株式保有率の現在保有水準は、2011年度上期末実績値。

## 相関係数の変化とリスク量 (大手行)



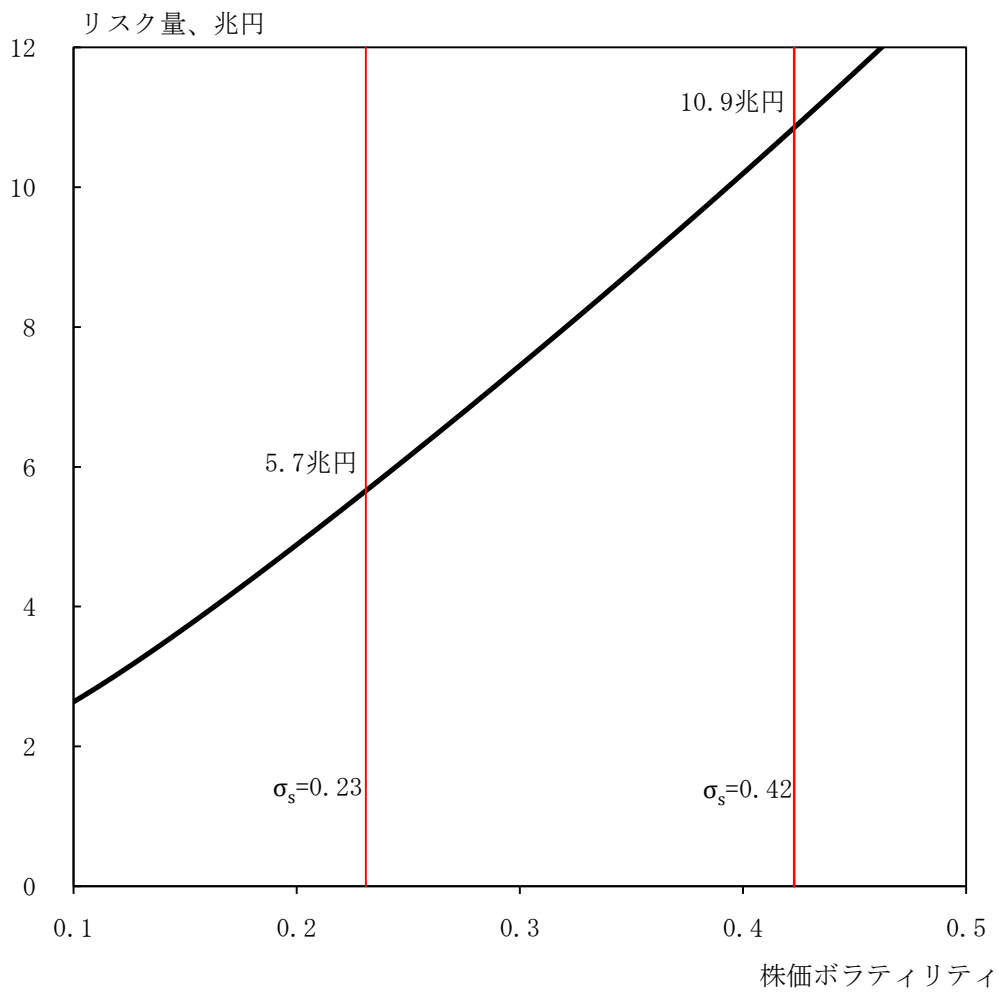
(注) 縦線は、左から2000年以降の平均的な水準 ( $\rho=0.33$ )、  
無相関 ( $\rho=0$ )、バブル崩壊後の実績値 ( $\rho=-0.63$ ) を表す。

## 相関係数の変化とリスク量 (地域銀行)



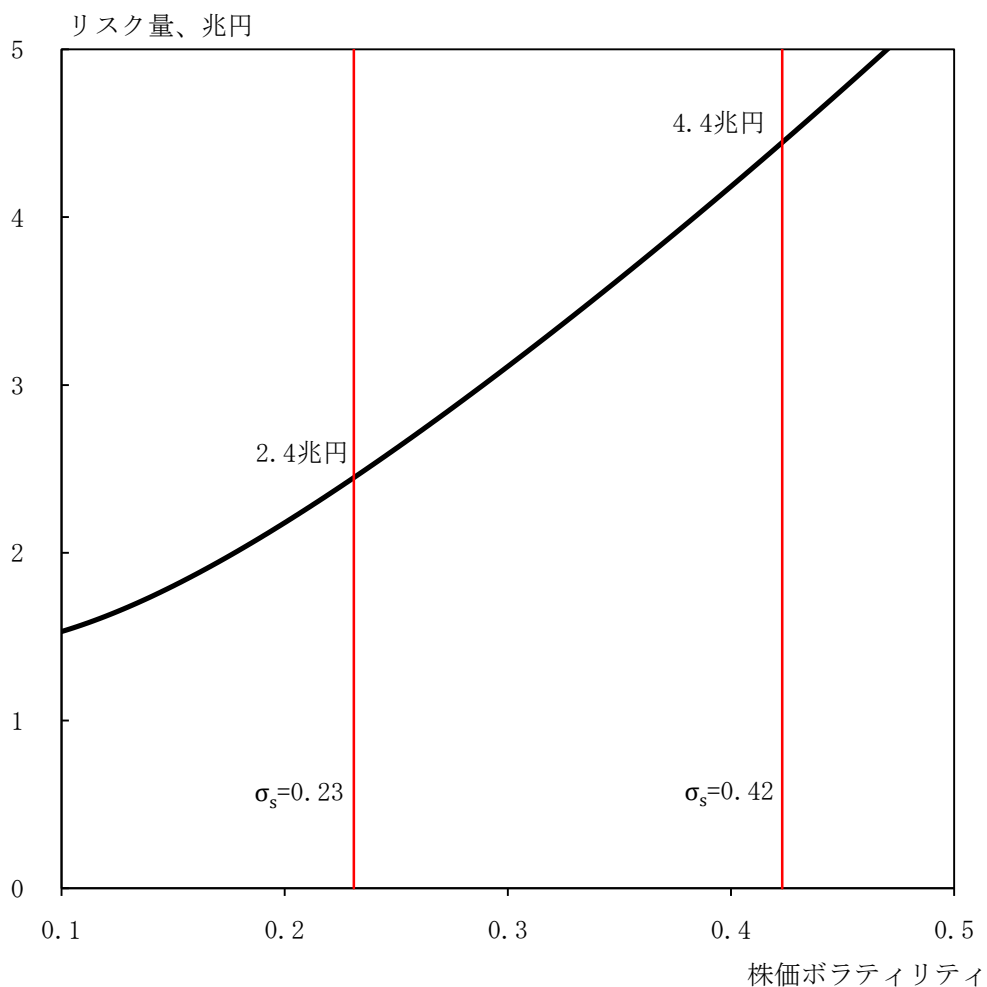
(注) 縦線は、左から2000年以降の平均的な水準 ( $\rho=0.33$ )、  
無相関 ( $\rho=0$ )、バブル崩壊後の実績値 ( $\rho=-0.63$ ) を表す。

## 株価ボラティリティの変化とリスク量 (大手行)



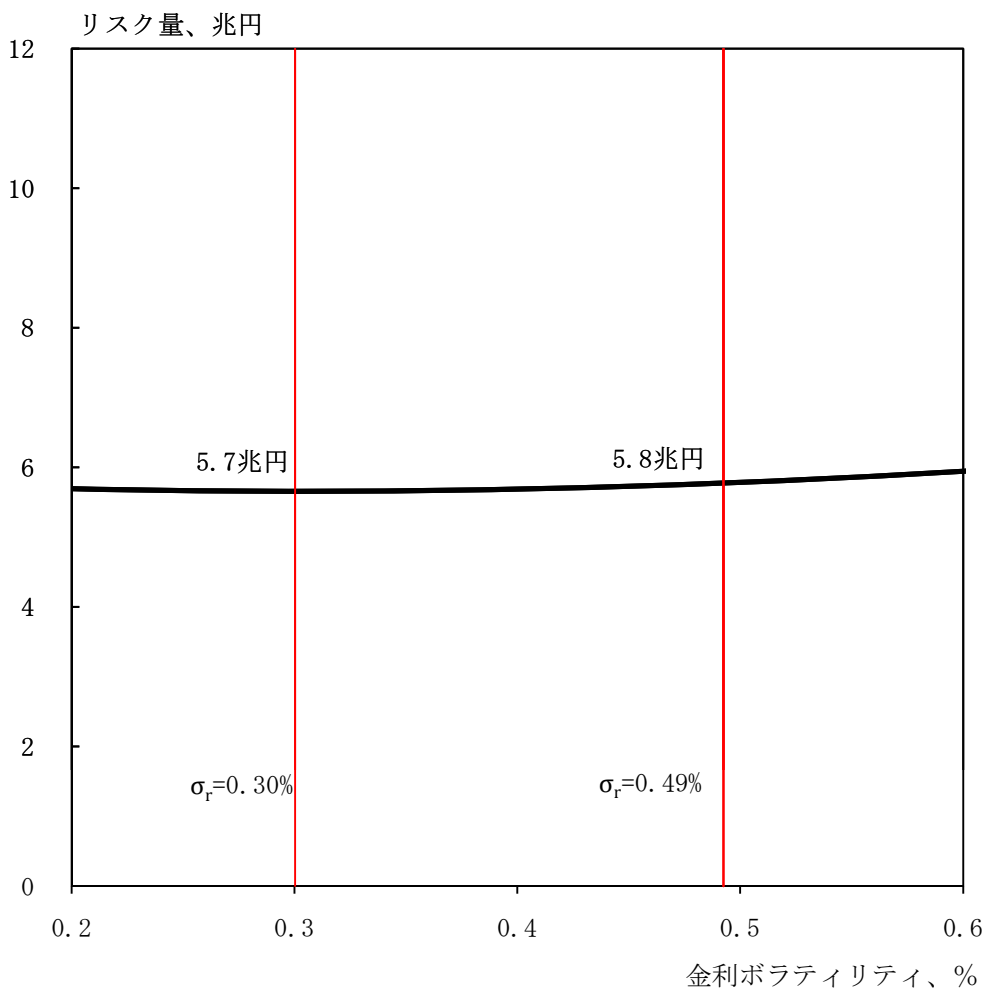
(注) 縦線は、左から2000年以降のデータを用いた推計値 ( $\sigma_s=0.23$ )、リーマン・ショック時を含む1年間のデータを用いた推計値 ( $\sigma_s=0.42$ ) を表す。

## 株価ボラティリティの変化とリスク量 (地域銀行)



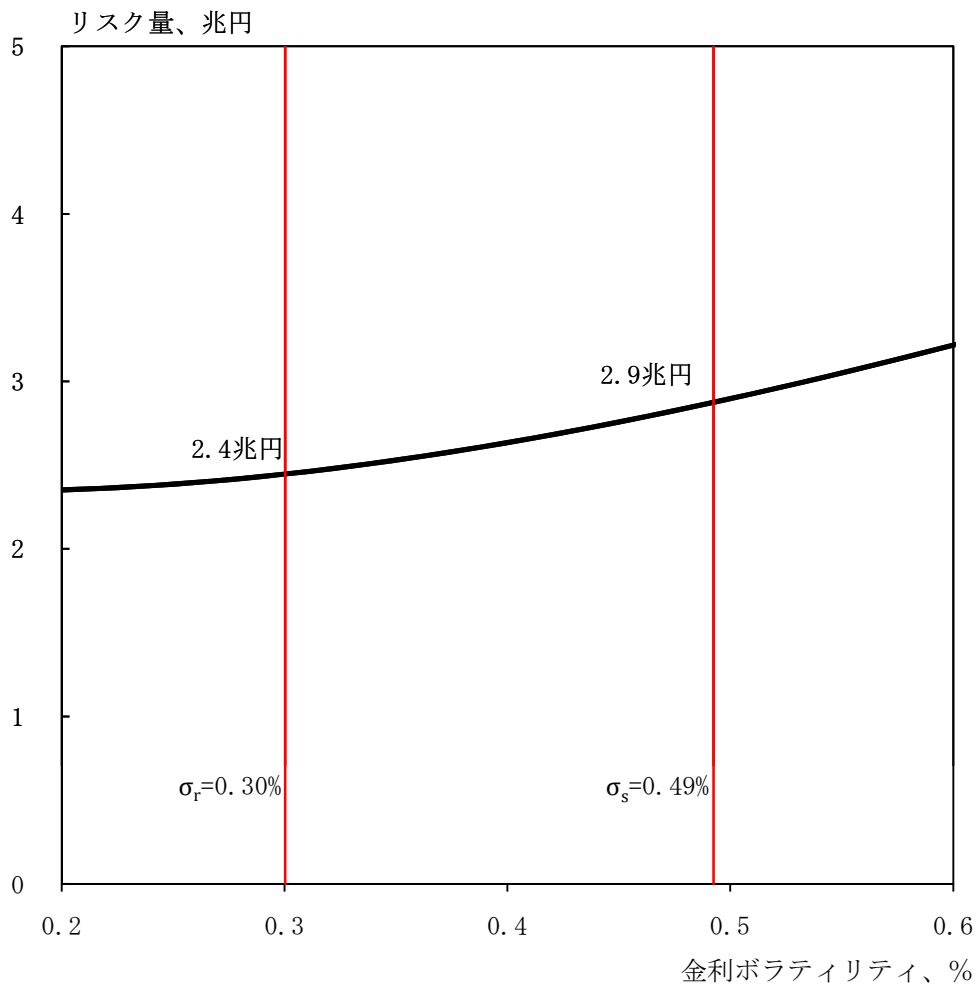
(注) 縦線は、左から2000年以降のデータを用いた推計値 ( $\sigma_s=0.23$ )、リーマン・ショック時を含む1年間のデータを用いた推計値 ( $\sigma_s=0.42$ ) を表す。

## 金利ボラティリティの変化とリスク量 (大手行)



(注) 縦線は、左から2000年以降のデータを用いた推計値 ( $\sigma_r=0.30\%$ )、リーマン・ショック時を含む1年間のデータを用いた推計値 ( $\sigma_r=0.49\%$ ) を表す。

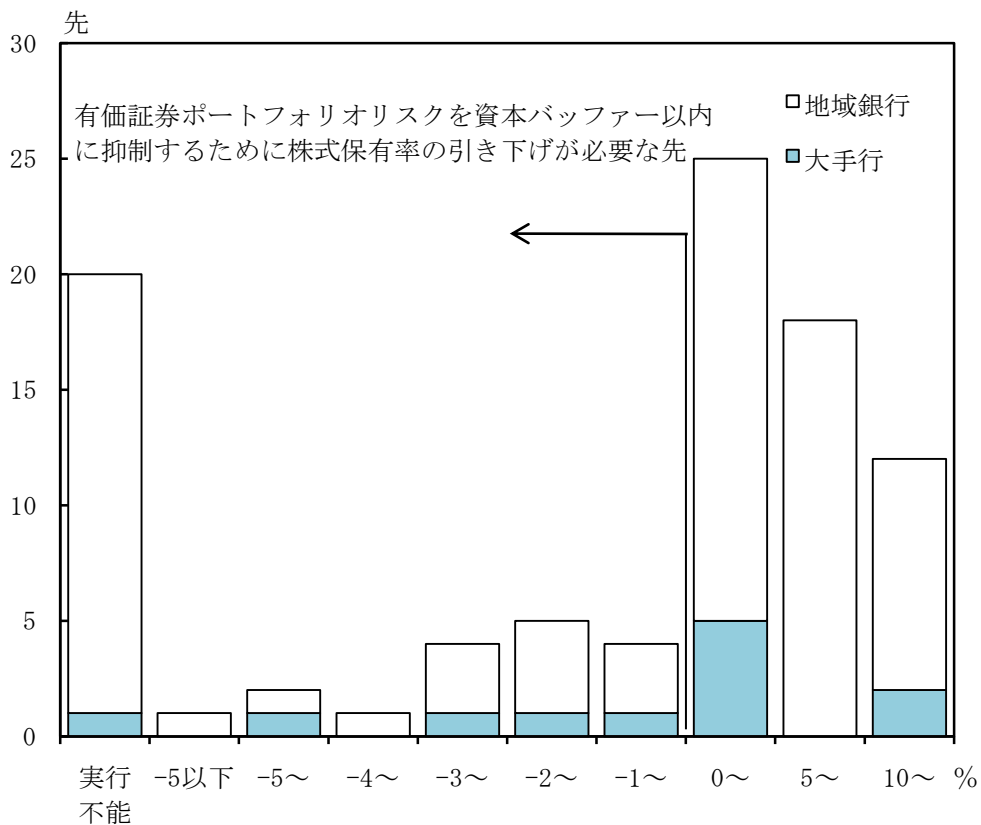
## 金利ボラティリティの変化とリスク量 (地域銀行)



(注) 縦線は、左から2000年以降のデータを用いた推計値 ( $\sigma_r=0.30\%$ )、リーマン・ショック時を含む1年間のデータを用いた推計値 ( $\sigma_r=0.49\%$ ) を表す。

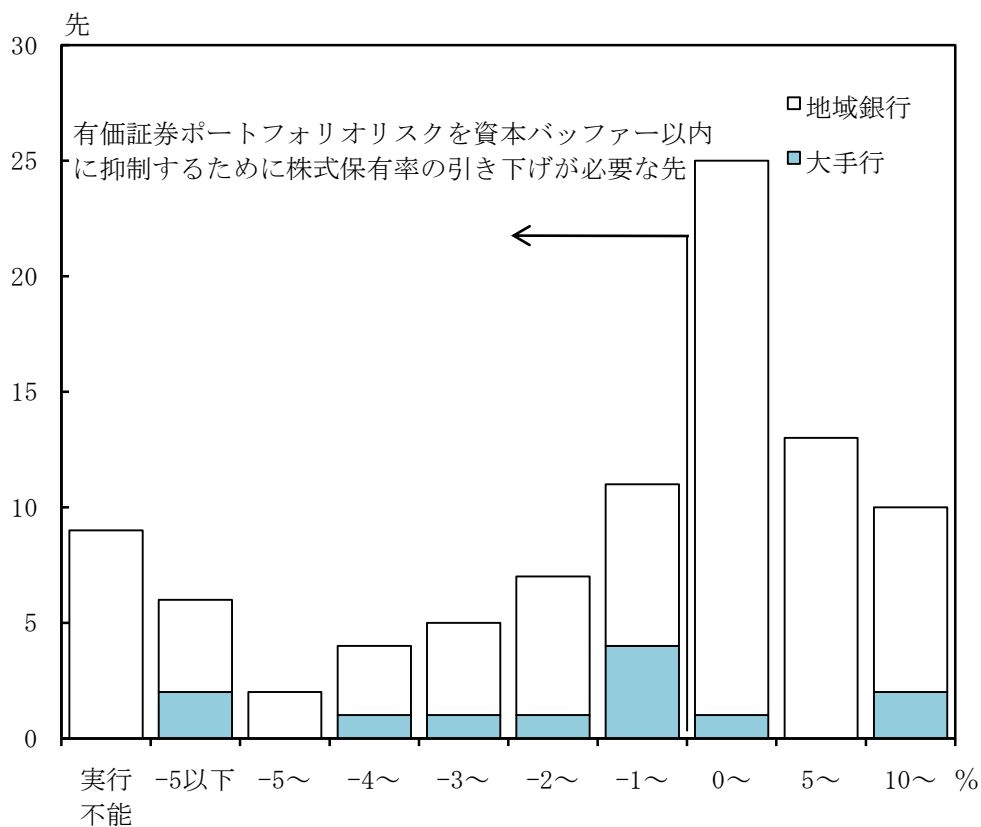


## 個別行の最適保有比率と現在水準との比較 (平均的な市場環境)



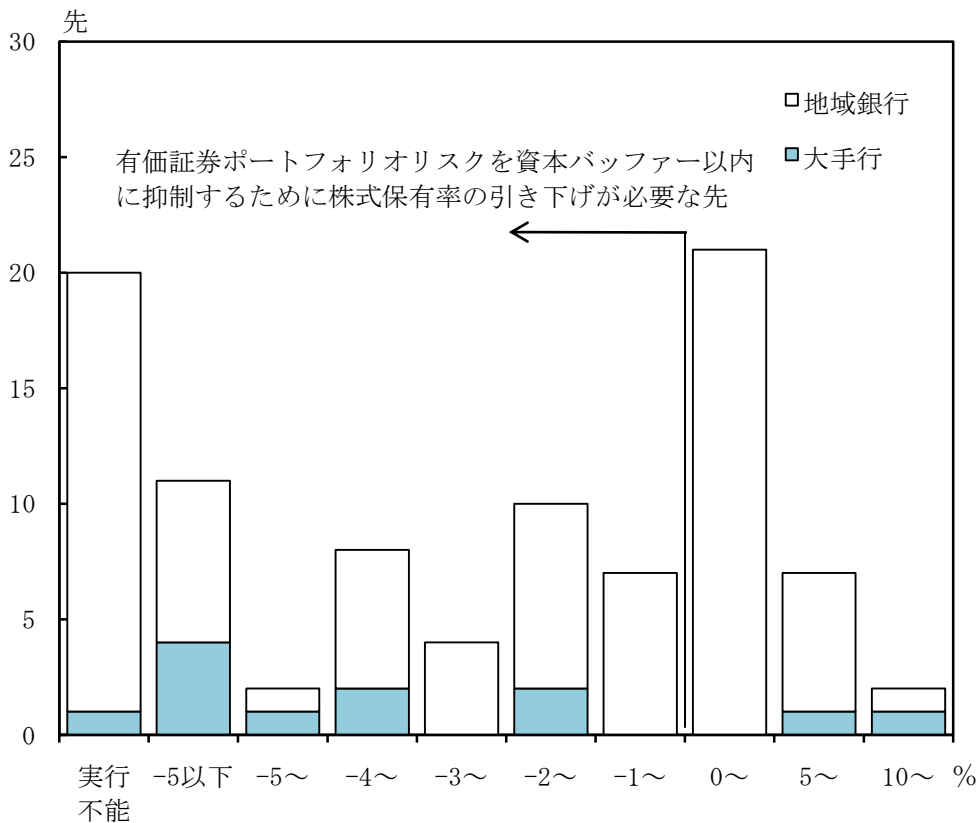
(注) 資本バッファがプラスとなっている先が対象。実行不能は、株式保有割合をどのように変化させても、有価証券ポートフォリオのリスクを資本バッファ以内に抑えることができない先を表す。

## 個別行の最適保有比率と現在水準との比較 (相関反転)



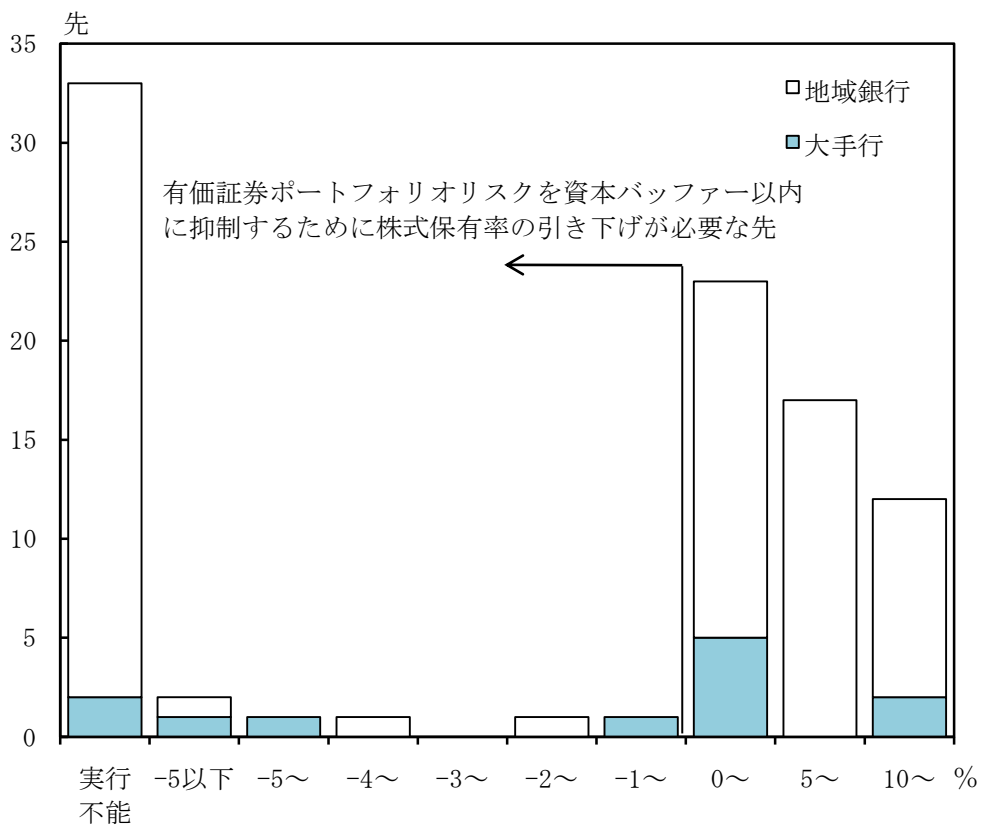
(注) 資本バッファがプラスとなっている先が対象。実行不能は、株式保有割合をどのように変化させても、有価証券ポートフォリオのリスクを資本バッファ以内に抑えることができない先を表す。

## 個別行の最適保有比率と現在水準との比較 (株価ボラティリティ上昇)



(注) 資本バッファがプラスとなっている先が対象。実行不能は、株式保有割合をどのように変化させても、有価証券ポートフォリオのリスクを資本バッファ以内に抑えることができない先を表す。

## 個別行の最適保有比率と現在水準との比較 (金利ボラティリティ上昇)



(注) 資本バッファがプラスとなっている先が対象。実行不能は、株式保有割合をどのように変化させても、有価証券ポートフォリオのリスクを資本バッファ以内に抑えることができない先を表す。

## サンプルの基本統計量

	平均	中央値	最大値	最小値	標準偏差	歪度	尖度	サンプル数
株価	1,366	1,270	2,125	847	340	0.59	-0.91	2,922
株価収益率	-0.02	0.02	12.86	-10.01	1.46	-0.34	6.26	2,922
金利	0.45	0.31	1.24	0.08	0.29	0.76	-0.78	2,945
金利変化幅	0.00	0.00	0.14	-0.12	0.02	0.35	4.99	2,945

(注) 株価収益率、金利の単位は%、金利変化幅の単位は%pt。株価収益率は配当を含まないベース。

パラメータの設定値

パラメータ	ベンチマーク	ストレス下
$\mu$	7.77%	—
$\sigma_s$	23.1%	42.4%
$\theta$	0.45%	—
$\sigma_r$	0.30%	0.49%
$\kappa$	0.52	—
$\rho$	0.33	-0.63