市場リスク回避度の推定
―プロスペクト理論に基づくアプローチ―

法政大学　経営学部　市場経営学科　山嵜輝ゼミナール
4 年　松井廉　　指導教員: 山嵜輝

＜要旨＞

本論文では、市場参加者たちのリスク回避度を定量的に推定する。具体的にはプロスペクト理論における各パラメータの推定を試みる。モデルには Wolff, Versluis, and Lehnert(2009) による Black=Scholes モデルにプロスペクト理論を融合させたモデルを用いる。分析の結果、パラメータのキャリブレーションが難しく、直接的なパラメータの推定に至らなかったため、実際にパラメータを変化させた際のオプション価格や価値関数の変化について考察を行った。

目次

１． はじめに

近年、行動経済学や行動ファイナンスに対する関心が高まってきている。行動経済学とは経済学のモデルに心理学の要素を取り入れた研究分野である。その中でも特にファイナンスの問題に応用したものを行動ファイナンスと呼ぶ。従来のファイナンス理論では十分に説明ができないようなことを投資家たちの心理に着目して表す理論で、本論で扱うプロスペクト理論もその一種である。実際の投資家たちの心理を考えることによって、従来の期待効用理論よりも現実に近い結果が得られることを期待し、研究テーマを決定した。

本論は以下のような構成となっている。２～４章では本論の分析に用いるモデルを説明するための様々なモデルや考え方について基本的な解説をする。２章では期待効用理論、３章ではプロスペクト理論、４章では Black=Scholes モデルについて説明をする。５章からは本論での分析に用いたモデルやデータなどについての説明を行う。５章では Black=Scholes モデルにプロスペクト理論を融合させたモデル（拡張 Black=Scholes モデルと呼ぶこととする）の導出と Black=Scholes モデルとの整合性について言及する。６章では分析に用いたデータと分析結果を記し、それに対する考察を行う。７章では本論文のまとめを行う。

２． 期待効用理論

2-1.期待効用理論とは

期待効用理論とは、不確実性を伴う意思決定において、その選択肢に対する選好関係が効用の期待値（期待効用）の大きさにより決定されるとする意思決定理論である。ある投資結果に対して抱く満足度を“効用”と表現し、「効用の期待値」を“期待効用”と呼ぶ（期待値の効用ではない)。期待効用理論では、意思決定者は期待効用が最大になるような行動、選択を取ると仮定される。 期待効用理論にはいくつかの公理があり、それらを満たせば人々は期待効用を最大化するように行動していると見なされる。その中でも独立性公理は疑問視されており、反例が唱えられた。独立性公理とは不確実性下の意思決定において選択肢を比べる時に、同じ結果をもたらすような部分はその選択肢からの選択に影響を与えない、というものである。期待効用理論ではリスク回避度に関して投資家を 1.リスク回避的 2.リスク愛好的 3.リスク中立的の三つに分類し、条件や環境などによって性質が変わることはないとしているが、同一人物でもリスク回避度が変わることが示された。

2-2.期待効用理論の特徴的なモデル

経済学では多くの効用関数がリスク回避的な選好を表現しており、不確実性下における意思決定について考える際の選好としてリスク回避的な効用関数を用いることが一般的とされている。効用関数のリスク回避の程度を示す指標として Arrow(1965), Pratt(1964)は, リ絶対的リスク回避度と相対的リスク回避度を定義した。uは効用関数を表し、絶対的リスク回避度をR_A、相対的リスク回避度をR_Rとすると、それぞれは以下のように定義される。

$$R_A = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \qquad (2.1)$$

$$R_R = -\frac{x * u''(x)}{u'(x)} \qquad (2.2)$$

ただし、u', u''はそれぞれ関数uの一階微分と二回微分を表している。この絶対的、相対的リスク回避度がそれぞれ一定の条件を満たすとき、代表的なリスク回避的選好を表現する期待効用関数となる。ここで、ある期待効用の関数の絶対的リスク回避度が

$$R_A = \frac{1}{a+bx} \qquad (2.3)$$

で表されるとき、その効用関数は Hyperbolic Absolute Risk Aversion(HARA)型効用関数と呼ばれる。ただし、a, bは定数とする。

HARA 型効用関数の絶対的リスク回避度の定数a, bが$a = 0$かつ$b > 0$を満たすとき、その期待効用関数は相対的リスク回避度一定型効用関数（constant relative risk aversion utility）と呼ばれ、英語の頭文字をとって CRRA 型効用関数と表現する。CRRA 型効用関数は以下のように表される。

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \gamma \neq 1 \qquad (2.4)$$

$$u(x) = log\, x \quad \gamma = 1 \qquad (2.5)$$

ただし、$\gamma = 1/b$であり、この総体的リスク回避度は常に一定でγとなる。(2.4)式の効用関数を冪型効用関数、(2.5)式の効用関数を対数型効用関数と呼ぶ。

また、HARA 型効用関数の絶対的リスク回避度の定数a, bが$a > 0$かつ$b = 0$を満たすとき、その期待効用関数は絶対的リスク回避度一定型効用関数(constant absolute risk aversion utility）と呼ばれ、CRRA 型効用関数と同様に英語の頭文字

から CARA 型効用関数と表現することが多い。CARA 型効用関数は以下のように表

される。

$$u(x) = -e^{-\alpha x} \qquad (2.6)$$

ただし、$\alpha = 1/a$であり、CARA 型効用関数の絶対的リスク回避度は常に一定でαとなる。(2.6)式の効用関数を指数型効用関数と呼ぶ。

　また CARA 型効用関数は正規分布に従う確率変数と併用されることが多い。変数xが平均μで標準偏差σの正規分布に従うとすると、CARA 型効用関数に従う個人の効用関数は

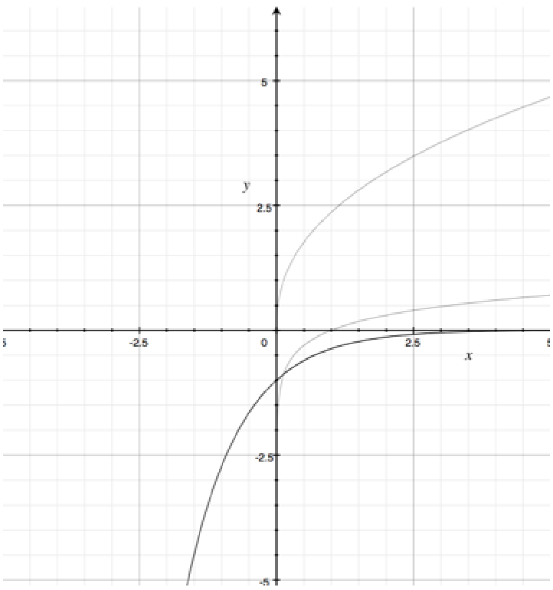
$$\mathrm{E}[\mathrm{u}(x)] = e^{a\mu - \frac{1}{2}a^2\sigma^2}$$

となり、a でくくると効用最大化原理より$\mu - \frac{1}{2}a\sigma^2$の最大化条件を考えればよいことになる。つまり実質的に個人は平均分散効用に従っていることとなり、これは正規分布に従う仮定下では CAPM の背後に仮定される効用関数であることが示唆されている。CARA 型の指数型効用関数を用いた場合、所得効果が存在しない。つまり人々が絶対的リスク回避度が一定の効用関数に従うとき、所得及び資産の水準（保有する富）は人々のリスク資産の需要に影響を与えない。

　また、次のような二次関数の効用関数も HARA 型効用関数である。

$$u(x) = -Bx^2 + Ax \qquad (2.7)$$

A,B は定数で、B＞0 を満たし、この効用関数で比較できる投資から得られる利益は A/(2B) より小さくなければならない。



（図 1 :特徴的な効用関数の形状）

縦軸を効用$u(x)$,横軸を富xとする。上から順に、(2.5)式の冪型効用関数、(2.5)式の対数型効用関数、(2.6)式の指数型効用関数のグラフとなっている。

３．　プロスペクト理論

3-1.プロスペクト理論とは

プロスペクト理論とは Kahneman and Tversky[1979]により提唱された理論で、プロスペクトとは予想、見込みなどの意味である。プロスペクト理論は従来の期待効用理論と似ている部分も多いが、価値の感じ方や予想のたて方に関して心理学の効果を含んで考えている点が異なる。プロスペクト理論では大きく分けて価値関数と確率ウエイト関数の二つの特徴がある。

3-2-1.価値関数

$$u(x) = \quad x^{\alpha} \quad x \geq 0 \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$= -\lambda(-x)^{\beta} \; x < 0 \quad (0 < \beta < 1\,,\ \lambda > 1) \qquad (3.1)$$

ここで、xは基準点からの損益、α はリスク回避度、βはリスク選好度、λは損失回避度を表している。それぞれのパラメータは、α が大きいほどリスク回避的であることを表し、β が大きいほどリスク選好的であることを表し、 λ が大きいほど損失を嫌うことを表している。

$\lambda > 1$ は利益よりも損失の方を大きく感じることを表す。

プロスペクト理論における各パラメータを$\alpha = 0.6\,\beta = 0.6\,\lambda = \ 2.2$ とした時の価値観数のグラフは以下のようになる。

（図 2 :S 字型効用関数の形状）

縦軸は効用$u(x)$ 、横軸は参照点からの富xを表す。

3-2-2.参照点・基準点(reference point)

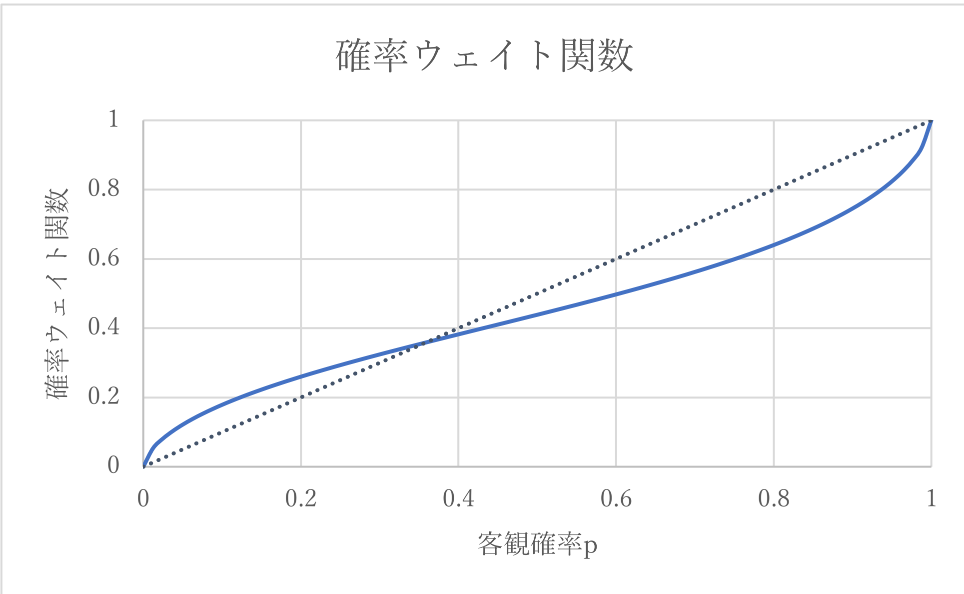
通常、投資結果は１円でも儲けが出れば（手数料などは考慮しない前提では）会計上では損益はプラスとなる。しかし、例えば１円の儲けを出した投資家が過去に同じような取引で１０００円の儲けを出したとすると、今回の結果は９９９円分損している（余地がある）と感じ、心理的に損失を抱えている（心理的損益認識）。この時参照点は１０００円に設定されていることになる。このように同じ投資結果でも比較するものによって、つまり参照点の設定によって心理的損益会計と実際の損益会計が異なるのでプロスペクト理論において非常に重要な役割を担っている。

3-3.確率ウェイト関数

客観確率と比べて主観的な確率は歪んでおり、大きい確率を過小評価し、小さい確率を過大評価してしまう。$\gamma(\gamma \leq 1)$は曲率、pは客観確率を表し、確率ウェイト関数を$w(p)$とすると以下のように表せる。

$$w(p) = \frac{p^{\gamma}}{\left(p^{\gamma}(1-p)^{\gamma}\right)^{1/\gamma}} \qquad (3.2)$$

γ =0.65 の時、確率ウェイト関数のグラフは以下のようになる。点線はγ =1 の時の確率ウェイト関数であり、客観確率pと一致する。



（図３:確率ウェイト関数の形状）

４． Black=Scholes モデル

4-1.Black=Scholes モデルとは

Black=Scholes モデルとは Black and Scholes(1973)によりオプションの価格付けに対する研究の一環として発表された株価変動のモデルで、ヨーロピアンタイプのオプションプレミアムを解析的に計算できるものである。後に Robert Merton が彼らの方法に厳密な証明を与えた。資産価格が幾何ブラウン運動に従うとする。また、Stは時点 t における資産価格（株価)、Δt は時点 t を始点とする非常に短い時間の長さ（単位は年)、ΔStは短い期間Δt に置いて発生する資産価格の変化、μは資産の一年あたりの収益率の期待値（株価の期待収益率、定数)、σ は資産の一年あたりの収益率の標準偏差（株価の期待収益率の標準偏差）（定数)、ΔZtは期待値 0 分散Δt（１）の正規分布に従う確率変数（ウィーナー過程）である。St は対数正規分布に従う。この時、資産価格の変化 ΔSt は以下のように表す。

$$\Delta St = \mu St\Delta t + \sigma St\Delta Zt \qquad (4.1)$$

Black=Scholes モデルの下で満期 T、行使価格が K である時のヨーロピアンタイプのコールオプションプレミアムが無裁定となるような条件を求めると、その時の Black=Scholes 方程式の解は以下のようになる。

$$C = StN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2) \qquad (4.2)$$

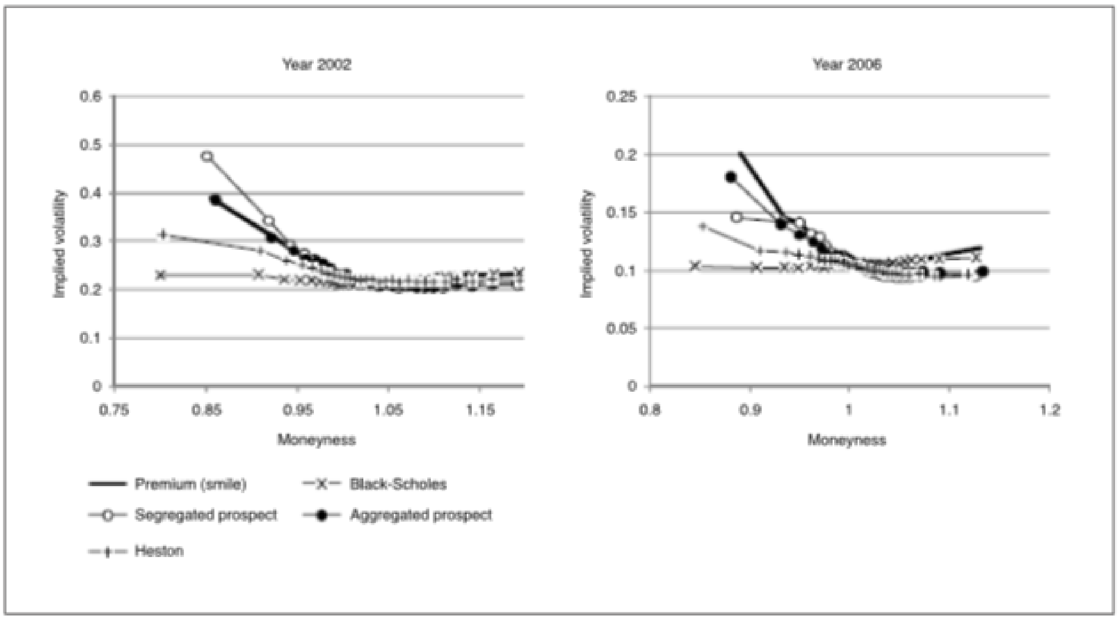
$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{2}}dy$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{St}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{St}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

4-2.インプライド・ボラティリティ

Black=Scholes モデルは幾何ブラウン運動に従うのでボラティリティが一定であるという仮定がある。そしてこのモデルではオプションを特定すれば残りの変数はオプション価格とボラティリティーのみになる。つまりどちらかが観測できればもう一方も求まるので、ブ Black=Scholes モデルで算出されたオプション価格を用いて、逆算したボラティリティーのことをインプライドボラティリティーと呼ぶ。インプライドボラティリティ(以下 IV)を縦軸、行使価格（本論では moneyness）を横軸にプロットした時、原資産価格と行使価格との差が乖離するにつれて IV が大きくなる傾向がある。この時のグラフの形状が笑顔を連想させることから、ボラティリティスマイルと呼ぶ。IV が小さくなったものはボラティリティスキューとも呼ぶ。Black=Scholes モデルではボラティリティを一定と仮定していたのでグラフの形状は線形であると予想されるが、実際にはこのように歪んでいるので、この仮定は現実には満たされていないことが分かる。下の図は Wolff, Versluis, and Lehnert(2009) Figure2 である。



（図 4 :ボラティリティスマイルの形状）

５． Black=Scholes 拡張モデル

本論文では市場のリスク回避度を推定するために Wolff, Versluis, and Lehnert[2009]による Black=Scholes モデルとプロスペクト理論を融合した、Black=Scholes 拡張モデルを分析に用いる。この章では拡張モデルの導出と Black=Scholes モデルとの関係について説明する。

5-1.確実性等価

この Black=Scholes 拡張モデルではオプション価格のプライシングに確実性等価の概念を用いる。確実性等価とは一般的なリスク回避的な投資家を前提とした効用関数のグラフ上において期待効用 E[u(x)]をとるとき、不確実性つまりリスクがある下での期待効用と同等の効用を、無リスクで得られる期待値に換算して表現したものである。リスク中立的な投資家たちの期待効用は期待値のみを考えるので線形で表すことができ、この差をリスク回避的な投資家たちはリターンとして要求するので、リスクプレミアムと呼ぶ。ある選好関係が U(X)=E[u(X)]で表されるとする。この時の選好はリスク回避的であり、u は凹関数である。任意の確率変数 X の関数 u についての確実性等価とは次を満たす定数 C のことである。u(C)=U(X)=E[u(X)]この時 C≤E[X]が成り立つ。したがって、リスク回避的な選考を持つ意思決定者は不確実なものに対して、確実に得られる利益以上の平均的な利益を要求することとなる。

5-2.Black=Scholes 拡張モデル

まずヨーロピアンタイプのコールオプションを売る投資家のペイオフを考え、将来のペイオフX_Tとする。投資額を L、原資産価格をS_T、行使価格をKとおくと次のように表せる。

$$X_T = -\mathrm{L} * (S_T - K)^+$$

確実性等価より

$$u(C) = U(X) = E[u(X)]$$
$$u(C_t) = E[u(X_T)]$$

C_tはオプションプレミアム総額の将来価値なのでC_t=e^{rT}cLと表せる。これを上の式に代入して整理して、これを c について解くと、ヨーロピアンオプションの価格は以下のようになる。

$$u(e^{rT}cL) + E[u(-L * (S_T - K)^+)] = 0$$
$$c = e^{-rT}L^{-1}u^{-1}E[-u(-L * (S_T - K)^+)]$$

この式の効用関数にプロスペクト理論の S 字型効用関数と確率ウェイト関数を与えると次のような式となる。

$$\mathrm{c}=e^{-rT}L^{(\beta-\alpha)/\alpha}\,(\lambda\int_K^\infty \psi\big(1-F(S_T)\big)f(S_T)\,(S_T-K)^\beta dS_T)^{1/\alpha} \quad (5.1)$$

ここで、

$$F(S_T)=\Phi(\frac{\ln(S_T/S_0)-(\mu-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}})$$

は対数正規分布の分布関数（Φ は標準正規分布の分布関数）

$$\psi(p)=\frac{dw(p)}{dp}$$

は確率ウェイト関数の導関数

$$f(S_T)=\frac{1}{S_T\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\left(\frac{-[\ln(S_T/S_0)-(\mu-\sigma^2/2)T]^2}{2\sigma^2 T}\right)$$

は対数正規分布の確率密度関数である。(5.1)式のパラメータに $\alpha=\beta=1, \gamma=1, \lambda=1, \mu=\mathrm{r}$、w(p)≒p とするとリスク中立的な投資家によるオプションプレミアムを導出できる。これを代入すると(5.1)式は以下のようになる。

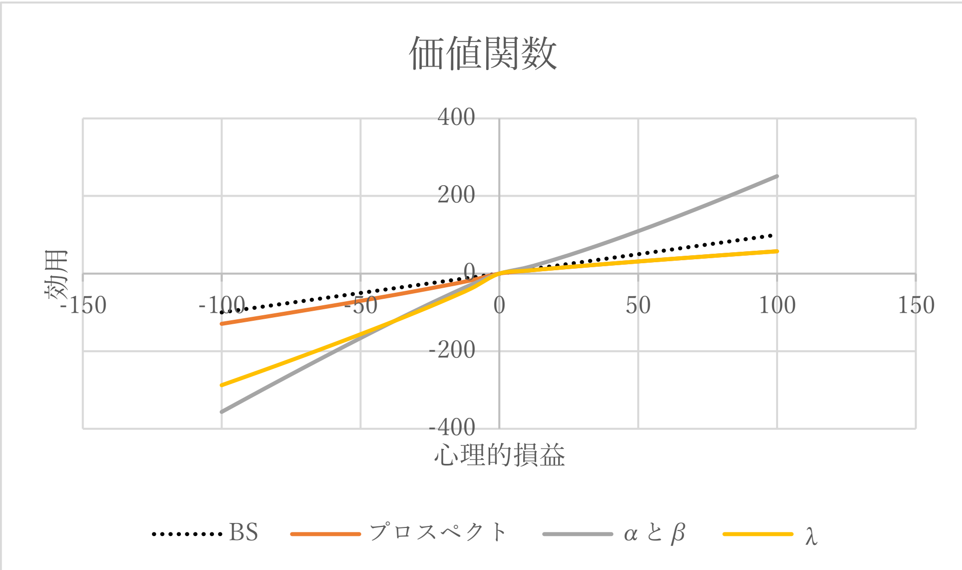
$$\mathrm{c}=e^{-rT}\,(\int_K^\infty f(S_T)\,(S_T-K)dS_T)$$

$$=S_0\Phi(d_+) - \mathrm{K}\ e^{-rT}\,\Phi(d_-)$$

このように、(5.1)式は通常の Black=Scholes モデルに帰着する。したがって(5.1)式は Black=Scholes モデルの拡張モデルになっていると言える。

６．　分析結果と考察

　今回の研究では、オプションデータとして日経２２５オプションを用いる。期間は2020年4月7日の一ヶ月限月のコールオプション価格を用いる。行使価格はATM付近の取引量が比較的多いものを用いる。データは日経Financial Questから取得した。今回は(5.1)式を用いてコールオプションの理論価格を算出し、コールオプションの時価と合うように各パラメータのキャリブレーションを行なった。しかし適切な結果が得られなかったため、実際に各パラメータを手動で調整してみて通常のBlack=Scholesモデルとの違いについて考察していく。



（図５:各パラメータを調整した価値関数グラフ）

上の（図５）はBlack=Scholes拡張モデルの各パラメータを調整して通常Black=Scholesモデルと比較したものである。BSは各パラメータが１、つまりBlack=Scholesモデルのものである。プロスペクトはパラメータをKahneman and Tversky[1979]によるものに設定した。具体的には$\alpha = 0.88$ $\beta = 0.88$ $\lambda = 2.25$である。αとβは、それぞれを１.１に設定して、その他はプロスペクトと同じにした。λはλ=5としてその他をプロスペクトと同じにした。まず価値観数について、αとβはKahneman and Tversky[1979]によると0より大きく１未満と定義されているが、Wolff, Versluis, and Lehnert[2009]による同モデルを用いた分析ではα=2.06, β=2.02と１より大きい値がパラメータとして推定されている。実際に(5.1)式を用いて日経２２５オプションのパラメータをカリブレーションを試みた際にも１より大きくなることがあった。価値観数のグラフを描いてみると、基準点を対称としてプラスの時はリスク選好的、マイナスの時はリスク愛好的な効用関数となった。また、数値を1.1より大きくすると指数関数的に価値観数が動いたが、コールオプションの

理論価格においてはどちらも線型的な相関は見られなかった。損失回避性λはどれだけ損失を嫌うかを表すパラメータであり、増加すればするほど理論オプション価格は増加した。これは人々が損失を嫌うほどリスクに対するプレミアムを要求するからだと考えられる。γは ATM を境にして動きが別れた。γを増加させると、OTM では理論価格が下がり、逆に ITM では増加し、γを減少させるとその逆の現象が見られた。これは確率ウェイト関数の歪み方が変わる$\gamma=1$をまたいでも同じような変化が見られた。標準偏差σと収益率μは増加すればするほど理論価格は上昇した。標準偏差σはボラティリティなので、リスクが大きくなればなるほど当然求めるリターンもリスクプレミアム分高く要求することになるからである。収益率μは原資産である日経平均株価の収益率を表しているので、それが増えるほどオプションが持つプレミアムも高くなるからである。

7．まとめ

本論文では(5.1)式を用いたパラメータの適切なキャリブレーション結果が得られなかったため、各パラメータの変化がもたらすオプション価格の変化について考察をした。今後、適切なキャリブレーション結果が得られれば別の期間との比較をして、コロナショックなどの市場急変時のリスク回避度の変化を推察できると思われる。

参考文献

山田哲也(2011)「行動ファイナンスの新展開：不確実性下における投資理論を中心として」『金融研究』p125~157 日本銀行金融研究所

岸本直樹・池田昌幸(2019)『入門・証券投資論』p315~334 有斐閣ブックス

Black, F. , M. Scholes .1973. Journal of Political Economy .*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*.

Christian Wolff, Cokki Versluis, and Thorsten Lehnert.2009. LSF Research Working Paper Series No.09-03. *A Cumulative Prospect Theory Approach to Option Pricing.*

Pratt, J. W. 1964. *Risk aversion in the small and in the large* .Econometrica, 32,pp.122–136.

参考データ

・https://glossary.mizuho-sc.com/?site_domain=default
・https://ja.wikipedia.org/wiki/リスク回避
・https://svc.qri.jp/jpx/nkopm/
・http://godfoot.world.coocan.jp/daikei_sekibun.htm
・http://www.indsys.chuo-u.ac.jp/~jgoto/opt/wor02opt.pdf
・https://www.geogebra.org/graphing?lang=ja
・https://ja.wikipedia.org/wiki/ブラック–ショールズ方程式