2018

正規分布に従わない資産の評価方法

法政大学　経営学部　市場経営学科　山嵜　輝ゼミナール　指導教員：山嵜　輝

4 年　星　眞生

＜要旨＞
　本論文では正規分布に従わない資産の評価方法について研究する。具体的には正規分布に従わない資産の選定、Gaurav S.Amin and Harry M Kat(2003)の手法である Efficiency test を用いて、その選定された資産に対する実行まで行う。またその結果に対する考察を行う。

目次

1. はじめに

従来、株式や債券などの投資のパフォーマンス評価にはジェンセンのアルファやシャープレシオなどが用いられてきた。この評価方法は対象資産の収益率が正規分布に従うことを仮定しているが、実際全ての資産がそのような仮定が成り立つわけではない。例えばヘッジファンドは今まで優れたパフォーマンスを上げてきたと言われてきた。しかし、それはシャープレシオなどの正規分布を仮定とした評価方法によるものである。実際ヘッジファンドはオプションやレバレッジなどを用いた特殊な戦略を取っている為に正規分布に従わないと考えられる。今回はこのような正規分布に従わない資産に対して Efficiency test という評価方法を用いた研究を行う。

本論文の構成は以下の通りである。次の章では正規分布についての定義、確率密度関数、歪度と尖度というような基本的な説明をする。3 章では今回のデータでは対象資産となる CBOE Binary Option Volatility についての説明を行う。4 章では従来の評価方法のシャープレシオやジェンセンのアルファなどの基本的な説明をする。5 章では今回の評価方法である、Gaurav S.Amin and Harry M Kat(2003)を参考にした Efficiency test というものを行う。6 章では今回の評価方法の実行では 5 章で扱った Efficiency test を今回の対象資産である CBOE Binary Option Volatility に行った過程と結果を示す。7 章では結論について言及する。

2. 確立分布とは

この章では正規分布などの基本的な確率分布関数の定義と性質に触れていく。

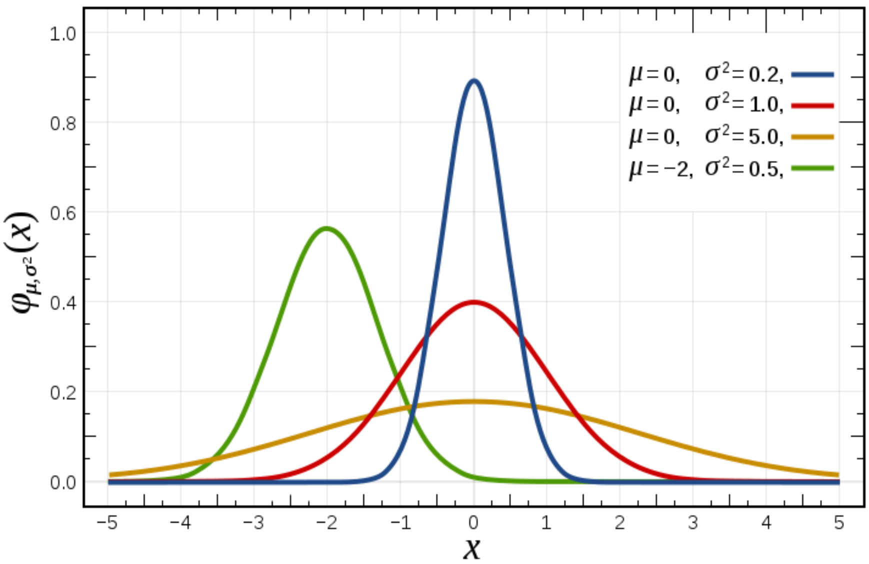
2-1.正規分布とは

正規分布(Normal Distribution)とは平均値の付近に集積するようなデータの分布を表した連続的な変数に関する分布であり、その確立密度関数は式（2.1）のように表せられる。 x は確立変数 X がとりうる値、μ は平均、σ は標準偏差である。また図 2.1 を示す。ここで重要なのはこの関数は(μ,σ)の二つのパラメータのみで決定される事である。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \sigma > 0 \quad (2.1)$$

図 2.1

確立密度関数

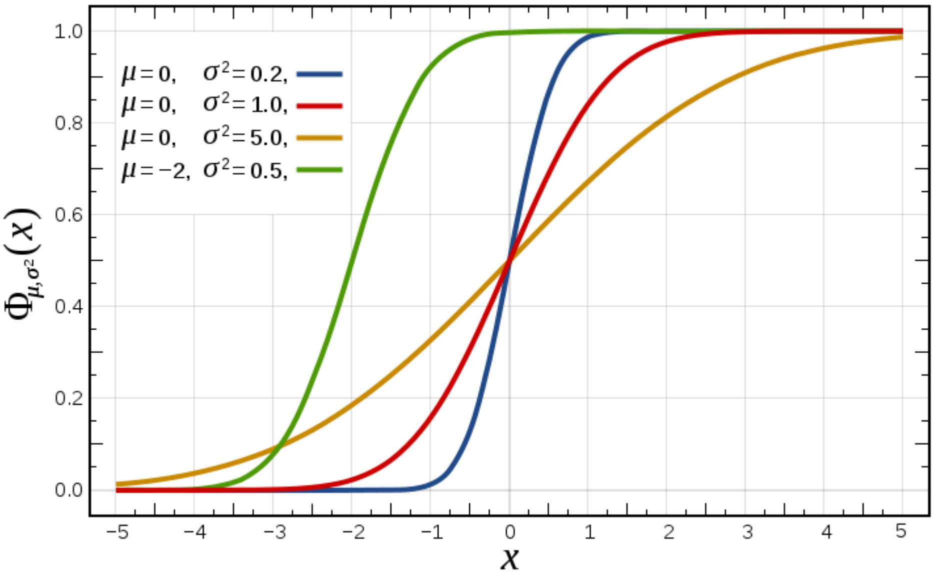


2-2.累積分布関数とは

累積分布関数(Cumulative Probability Distribution)とは確率変数 X がある値x以下となる確率を表す関数である。確率密度関数を積分する事で求められる。累積分布関数は式(2.2)のように表せられる。また図 2.2 に正規分布の累積分布関数を示す。

$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{P(X} < x) \ (2.2)$$

図 2.2
累積分布関数

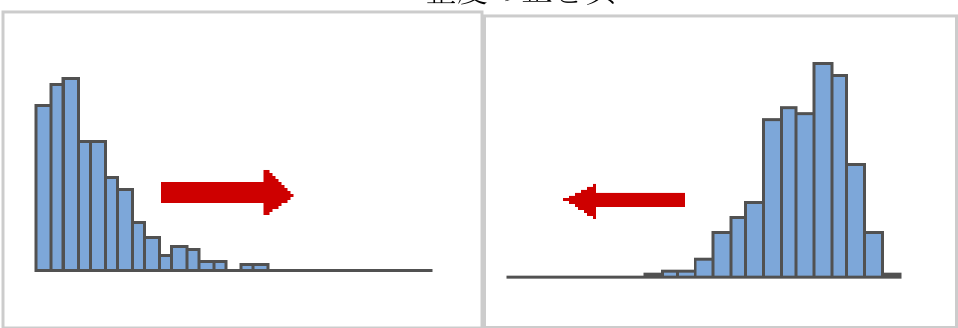


2-3.歪度、尖度とは

歪度(Skewness)とは分布が正規分布からどれだけ歪んでいるかを表す統計量で、左右対称性を示す指標の事である。歪度は「右裾が長い」もしくは「左に偏った」分布のときには正の値を、「左裾が長い」もしくは「右に偏った」分布のときには負の値を取る。左右対称の分布（例えば正規分布）の場合には 0 を取る。歪度は式(2.3)で定義される。 X は確率変数、 μ は確率分布の平均、 σ は標準偏差、E[]は期待値である。例として図 2.3 に歪度が正と負の分布を示す。

$$歪度 = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} - 3 \ (2.3)$$

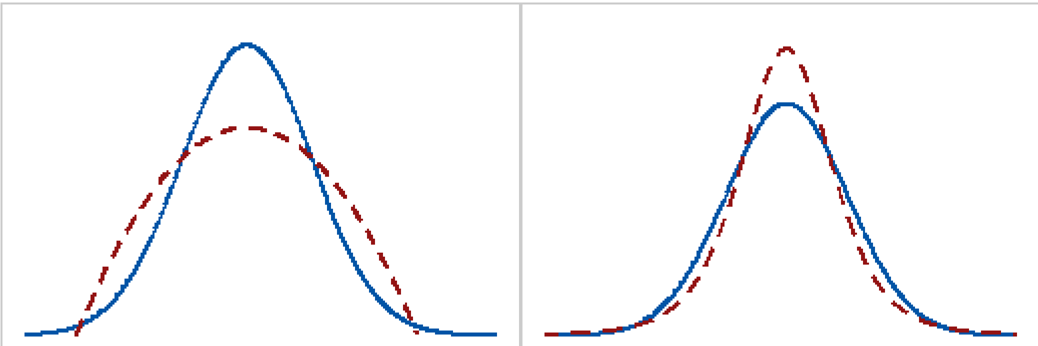
図 2.3
歪度の正と負



尖度(Kurtosis)とは分布が正規分布からどれだけ尖っているのか表す統計量で、山の尖り度と裾の広がり度を示すものである。正規分布より尖った分布（データが平均付近に集中し、分布の裾が重い）のときには正の値を、正規分布より扁平な分布（データが平均付近から散らばり、分布の裾が軽い）のときには負の値を取る。正規分布の場合には 0 の値を取る。尖度は式(2.4)と定義される。例として図 2.4 に尖度が正と負の分布を示す。

$$尖度= \frac{E\left[(X-\mu)^{3}\right]}{\sigma^{3}} \quad (2.4)$$

図 2.4
尖度の正と負



2-4.経験分布関数とは
経験分布関数(Emplical Distribution Function)とは未知の確認分布に従って作成されたｎ個のデータを用いて、この未知の確率分布を推定したものである。ある母集団 M が累積分布関数 F(x)に従っているとし、母集団 M から抽出されたｎ個の標本を $x_1, x_2, \cdots x_i, \cdots, x_n$ とする。この時、経験分布関数は式(2.5)で表すことができる。

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\, x_{i\leq}x \quad (2.5)$$

3. データ
今回の研究では正規分布に当てはまらない金融資産のデータなので歪度と尖度の値に注目して対象資産を厳選した。今回ここで扱う対象資産としては CBOE Binary Option Volatility を扱う。期間は 2008 年 7 月から 2018 年 12 月までのデータを用いる。また、参照インデックスとして S&P500 を用いる。

3-1.CBOE Binary Option Volatility とは
CBOE Binary Option Volatility とはシカゴオプション取引所で取引される、Binary Option の Volatility を原資産とした指数先物である。また Binary Option とは Option 取引の一つで、現在の価格から資産が上がるか下がるかを予想し、投資するものである。特徴として損益幅が限定されており、追証やレバレッジがないことがあげられる。
後で詳しく述べるがベンチマークである S&P500 と比べ、歪度が大きな値を取っていた為、正規分布に従わないと判断したので今回の対象資産として選定した。

4. 従来の評価方法

従来、様々な研究者が金融資産の収益率は正規分布に従っているという仮定を元に様々な評価方法を用いてきた。その代表的な例としてジェンセンのアルファとシャープレシオについてこの章では紹介していく。

4-1.シャープレシオ

シャープレシオとはリスク 1 単位当たりの超過リターンを測るものである。主に、シャープレシオは評価対象となるポートフォリオが取っているリスクに見合うだけの収益をあげているかどうかをチェックするための指標であり、同じ運用利回りであってもシャープレシオが高いポートフォリオの方が高いリスク（収益のブレ）がない効率的な運用ができていると評価することができる。式は(4.1)のように表せられる。Ri はポートフォリオの収益率、σ_iはポートフォリオの標準偏差、Rf はリスクフリーレートである。

$$\mathrm{SR} = \frac{E[Ri] - Rf}{\sigma i} \quad (4.1)$$

4-2.ジェンセンのアルファ

ジェンセンのアルファとは実現されたポートフォリオのリターンと期待リターンの差、ポートフォリオのとったリスクから期待されるリターンに対する超過リターンと定義することができる。あるいはこの時 CAPM が成立しているのであれば、α_iは 0 でなくてはならない。このことからα_iが 0 より大きいとしたら、それは CAPM の不成立を表し、その株式からは平均的に超過リターンが得られることになる。つまり理論から逸脱するという意味で異常な期待リターン値を表す以下のα_iのことをジェンセンのアルファという。詳しい CAPM とジェンセンのアルファの説明は補論 1 で説明を行う。リスク尺度は､トレーナーの測度と同じベータ（β）値を用いる。ジェンセンのアルファは式（4.2）のように表せられる。α_iはアルファ値、Ri はポートフォリオの収益率、Rf はリスクフリーレート、βi はポートフォリオのベータ値、Rm は市場全体のポートフォリオの収益率である。

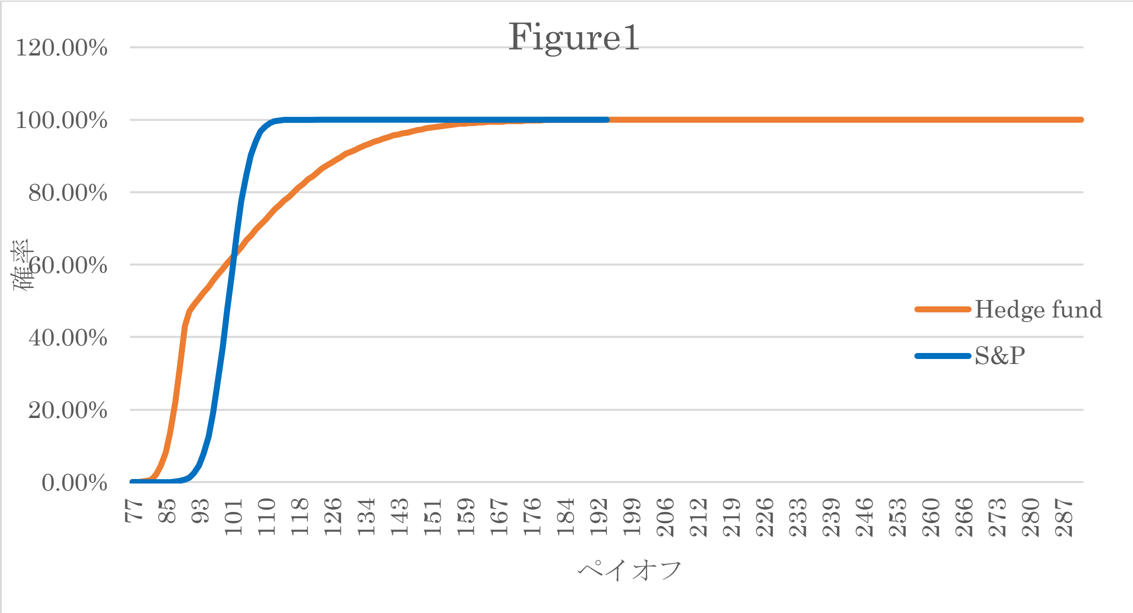
$$\alpha_i = \mathrm{E[Ri]} - \{Rf + \beta i(E[Rm] - Rf)\} \quad (4.2)$$

5. 今回の評価方法

今回の評価方法として Efficiency test というものを用いる。これは Gaurav S.Amin and Harry M Kat(2003)の手法を適応したものである。従来の評価方法は CAPM を前提としており、CAPM は全ての資産リターンが正規分布に従うと仮定している為に今回の資産には適切な評価方法とは言えない為にこの Efficiency test というものを用いる。また、この Efficiency test は 3 つのステップに分けることができる。元の論文を参考にし、ここでは対象資産をヘッジファンド、ベンチマークを S&P500 とする。Hedge Fund のリターンは 1 万個の疑似データを用いた。

ステップ 1 として月の初めに S&P500 と Hedge Fund に 100 投資すると仮定する。
Hedge Fund に関しては分布における仮定は考えないが S&P500 の
リターンは正規分布に従うと仮定する。この二つを累積分布関数にして表したのが図 5.1 になる。図 5.1 から正規分布に従うと仮定している S&P と比べて、経験分布関数を用いて作った Hedge Fund のほうが歪なのがみてとれる。

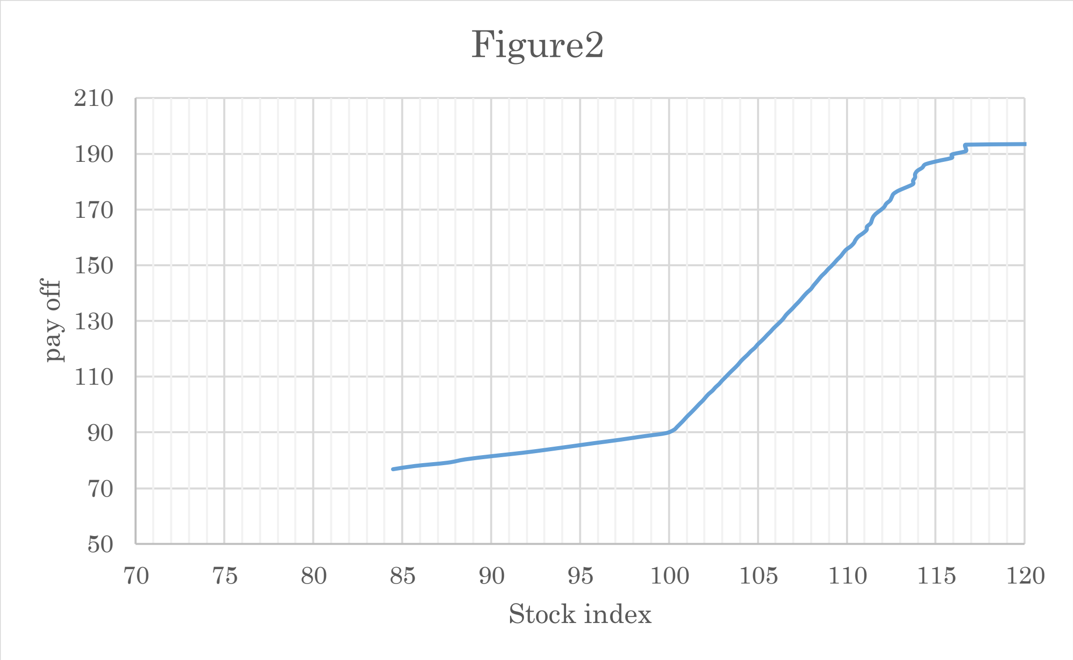
図 5.1
累積分布関数



ステップ 2 では参照インデックス、つまりは S&P500 を組み合わせ、評価資産のペイオフ分布と同様なペイオフ分布を生み出すペイオフ関数を構築する。仮定としてペイオフは経路独立で非減少関数であること。非減少関数である為に資産を買い持ちするだけでよいのでコストが安くなる。結果を図 5.2 に示す。例として S&P500 のペイオフが 100 を取る時、ヘッジファンドは 90 を取る。これを具体的な数式として表すと式(5.1)と表せられる。

$$f(100) = 90 \quad (5.1)$$

図 5.2
ペイオフ関数



ステップ 3 では複製ポートフォリオによる初期投資を計算する事である。求めるためにモンテカルロシミュレーションを用いる。前提として原資産の期待収益率を無リスク金利 r(μ=r)仮定する。約 10000 万個のインデックステータを作り、Hedge fund に一致するペイオフを計算する。そのペイオフを平均し、リスクフリーレートで割り引く。その結果が 100 を超えていれば優れたパフォーマンスを生み出していると言える。計算過程を下記に示す。詳しい式は補論 2 に記述する。

まず Black-Sholes モデルとは式(5.2)で定義される株価変動モデルである。St は時点 t における株価、μ は株価の期待収益率、σ は株価の標準偏差、dz はウィナー過程(Wiener process)である。パラメーター σ と μ は定数として与えられている。

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz \quad (5.2)$$

またここで Black-Sholes モデルを前提とした株式過程を式(5.3)のように表すことができる。r は無リスク金利である。

$$S_T = S_0 e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\sqrt{T}\varepsilon} \quad \varepsilon \sim N(0,1) \quad (5.3)$$

式(5.2)、(5.3)よりモンテカルロシミュレーションを用いて、(5.4)のように 1 期間後の株価を 1 万個作成する。

$$S_1^{(1)}, S_1^{(2)}, S_1^{(3)}, \cdots S_1^{(n)} \quad (5.4)$$

この(5.4)で作成した株価のペイオフに対応する、Hedge Fund のペイオフを計算し、平均し、リスクフリーレートで割り引く。式は(5.5)のように表すことが出来る。$S_1^{(n)}$はモンテカルロシミュレーションによる 1 期間後のペイオフ、$f\left(S_1^{(n)}\right)$はヘッジファンドのペイオフである。

$$\frac{1}{10000}\sum_{n=1}^{10000} f\left(S_1^{(n)}\right) \times e^{-rT} \quad (5.5)$$

ここで価格が 100 を超えていれば優れたパフォーマンスを生み出していると言える。以上がステップ 3 における計算である。

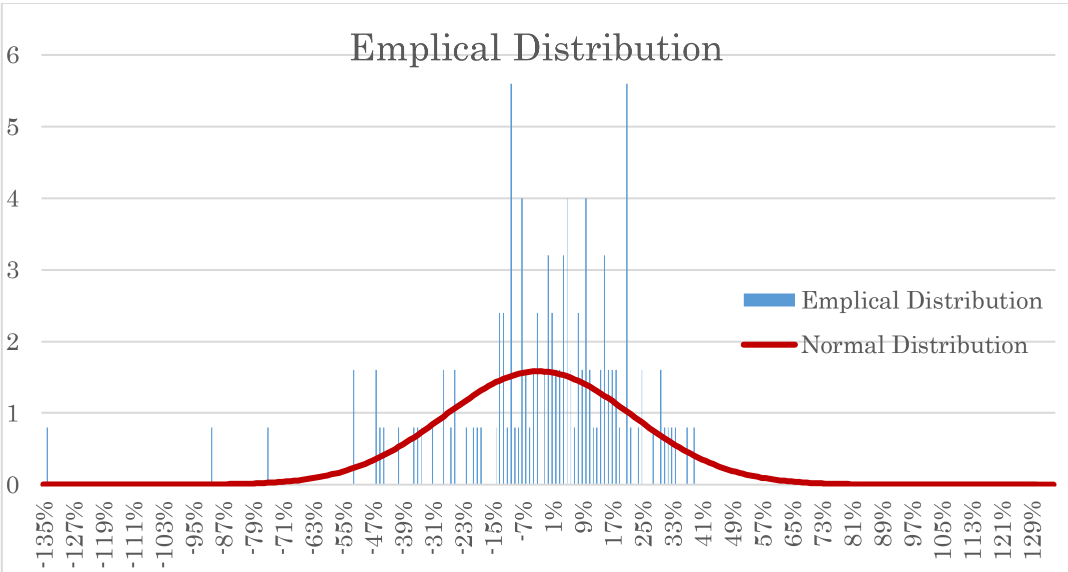
Efficiency test を行うことにより普通に Hedge fund に投資するより、S&P500 で複製することでよりコストのかからない優れた投資が実現することが可能となる。また Efficiency test とシャープレシオの結果の相関係数は 0.99 とほぼ同じ結果を取っている。

6. 今回の評価資産に対する Efficiency test の実行

この章では今回の評価資産である CBOE Binary Option Volatility に対する Efficiency test の実行を行う。また何故 CBOE Binary Option Volatility を対象資産にしたのか、他の資産では何故対象資産から外したのかなどについて詳しく述べていく。

まず初めに対象資産になるか対象資産の正規分布と経験分布を比べていく。また S&P500 と対象資産の歪度と尖度を比べていく。下記に対象資産の正規分布と経験分布を示した図 6.1 を示す。図 6.1 からわかる通り、経験分布のほうが歪な形を取っている。

図 6.1



S&P500 と対象資産の歪度と尖度の比較を下記の図 6.2 に示す。計算にあたり四分位範囲(IQR) の 1.5 倍を上限として外れ値検出を行っている。図 6.3 を見てみると歪度に関して-0.536304433 と S&P500 より大きな値を取っている。

図 6.3

CBOE Binary Option		S&P	
歪度	-0.536304433	歪度	-0.1928
尖度	0.117927161	尖度	0.143594

また参考として金先物、Dow REIT、Private Equity、Brazil index の歪度と尖度を図 6.4 に示す。図 6.4 からわかる通りに他の資産と比べて CBOE Binary Option Volatility の歪度が高いことがわかる。

図 6.4

金先物		Dow REIT	
歪度	0.21939148	歪度	-0.14864
尖度	-0.1140797	尖度	0.044259

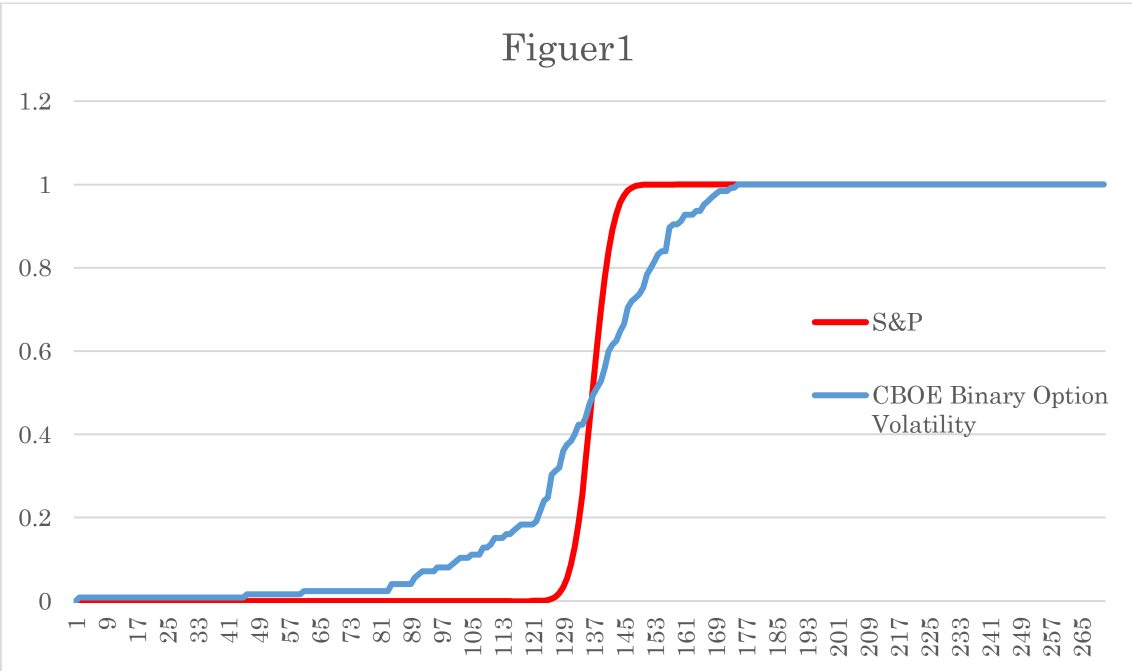
Private Equity		Brazil index	
歪度	-0.17629	歪度	0.098157
尖度	0.044081	尖度	-0.3207

以上より CBOE Binary Option Volatility が対象資産として適切と判断し、Efficiency test を行う。

5 章で述べたようにステップ 1 として月の初めに S&P500 と CBOE Binary Option Volatility に 100 投資すると仮定する。

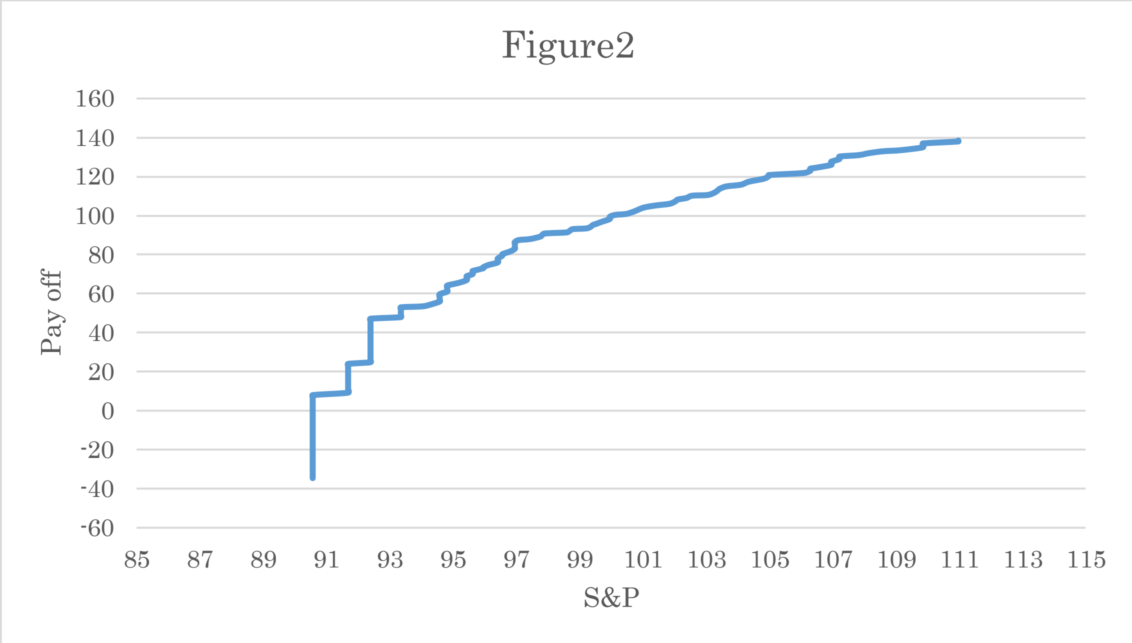
CBOE Binary Option Volatility に関しては分布における仮定は考えないが S&P500 については正規分布とする。この二つを累積分布関数にして表したのが図 6.5 になる。

図 6.5



次にステップ 2 として S&P500 を組み合わせ、CBOE Binary Option Volatility のペイオフ分布と同様なペイオフ分布を生み出すペイオフ関数を構築する。仮定としてペイオフは経路独立で非減少関数であること。このペイオフ関数を示したのが、図 6.6 である。

図 6.6



最後にステップ 3 として複製ポートフォリオによる初期投資を計算すること。モンテカルロシミュレーションを用いる。前提として原資産の期待収益率を無リスク金利 r(μ=r)仮定する。約 10000 万個のインデックスデータを作り、 CBOE Binary Option Volatility に一致するペイオフを計算し、それを平均し、リスクフリーレートで割り引く。結果が 100 を超えていれば、複製ポートフォリオの方が良いと言える。結果を下記に記す。

結果	99.27126

また参考として従来の評価方法のシャープレシオとジェンセンのアルファについて下記に示す。

α	−4.80%
SR	−19.13%

7. 結果

Efficiency test の結果として Binary Option Volatility は優れたパフォーマンスを生み出しているとは言えない結果になった。しかしデータや時間の関係上調べることが出来なかったがエキゾチックオプションやコーラブル債などヘッジファンドと同じようにペイオフを人工的に歪ませている資産には Efficiency test は有効な手段ではないかと考えられる。また正規分布を仮定とする事が改めて強力な方法である事が感じとれた。

参考文献

・Gaurav S.Amin and Harry M Kat.,2003,「Hedge Fund Performance 1990-2000: Do the “Money Machines” Really Add Value?」
・John C.Hull 「Options,Futures,and Other Derivatives (9th Edition)」

・小林孝雄、芹田敏夫　「新・証券投資論 I　理論篇」
・伊藤敬介、荻島誠治、諏訪部貴嗣　「新・証券投資論 II　実務篇」
・西田真二　「基礎から学ぶ　ファイナンス確率過程と数値解析」
・ジョンハル［著］、三菱 UFJ モルガンスタンレー証券市場商品本部［訳］　「ファイナンシャルエンジニアリング　デリバティブ取引とリスク管理の総体系」

参考データ

・https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E8%A6%8F%E5%88%86%E5%B8%83
・https://www.federalreserve.gov/releases/h15/
・https://jp.investing.com/
・https://support.minitab.com/ja-jp/minitab/18/help-and-how-to/statistics/basic-statistics/supporting-topics/data-concepts/how-skewness-and-kurtosis-affect-your-distribution

補論

1. CAPM とジェンセンのアルファの関係について

CAPM(資本資産価格モデル)とは金融資産の期待収益率のクロスセクション構造を記述するモデルである。CAPM は式(1.1)で定義される。E[Ri]は資産の期待収益率、r_fは安全資産の利子率、E[R_m]は市場全体のポートフォリオの収益率、β_mはポートフォリオのベータ値である。

$$\mathrm{E}[R_i]-r_f=\beta_{im}\left(E[R_m]-r_f\right)\ (1.1)$$

ここで CAPM を実際のデータに適応するには、通常、式(1.2)の線形回帰式に最小二乗法を適応する。r_fは安全資産の利子率、$R_{i,t}$は時点 t における株式 i の収益率、$R_{m,t}$時点 t における市場全体のポートフォリオの収益率、$\epsilon_{i,t}$は平均 0 の誤差項である。

$$R_{i,t}-r_f=\alpha_i+\beta_i\left(R_{m,t}-r_f\right)+\epsilon_{i,t}\ (1.2)$$

もし CAPM が成立しているのであれば、CAPM の定義よりα_iは 0 でなくてはならない。なぜならば上の線形回帰式の期待値を取れば、式(1.3)になる。

$$\mathrm{E}\left[R_{i,t}\right]-r_f=\alpha_i+\beta_i\left(E\left[R_{m,t}-r_f\right]\right)\ (1.3)$$

これを CAPM の式(1.1)と比較すれば、$\alpha_i=0$でなければならない。よってこのα_iが 0 よりも大きいとしたら、それは CAPM の不成立を表し、その株式からは平均的に超過リターンが得られることになる。つまり理論から逸脱するという意味で異常な超過リターンを式(1.4)のα_iのことをアルファ値という。

$$\alpha_i=\mathrm{E}[\mathrm{Ri}]-\{Rf+\beta i(E[Rm]-Rf)\}\ (4.2)$$

2.確率過程

5 章の Efficiency test のステップ 3 で述べていた確率過程の詳しい説明を行う。John C.Hull「Options,Futures,and Other Derivatives (9th Edition)」から基本的な説明は引用している。

まず確率過程におけるウィナー過程(Wiener process)とは以下の 2 つの性質を満たす確率過程のことである。

性質 1：時間Δt での変化Δz は以下のように表すことができる。ε は標準正規分布 ϕ ~(0,1) に従う変数である。

$$\Delta Z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

性質 2： Δt の任意の異なる二つの時間区間におけるΔz の値は互いに独立である。

1 よりΔz の分布は下記の正規分布になる

$$\Delta z\text{の平均} = 0$$

$$\Delta z\text{の標準偏差} = \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta z\text{の分散} = \Delta t$$

2 より将来の予想に関係するのは変数の現在の値のみであるという性質をもった確率過程であるマルコフ過程になる。

次に一般化されたウィナー過程として式（1）を示す。

$$\mathrm{dx} = adt + bdz (1)$$

式の t をΔt とすると（2）式のように表すことが出来る。

$$\Delta \mathrm{x} = \mathrm{a}\Delta \mathrm{x} + \mathrm{b}\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (2)$$

ここで株式過程を求める為に投資家の要求する期待収益率は株式とは独立である事を考える。期待ドリフト率が一定という仮定から期待収益率が一定という仮定に置き換える必要がある。S が株価、μ が株式の機体収益率 t が時間、σ が株式の標準偏差である。

dz が 0 とおくと、

$$\Delta \mathrm{S} = \mu \mathrm{S}\Delta \mathrm{t}$$

$\Delta \mathrm{t} \to 0$とすると

$$\mathrm{dS} = \mu \mathrm{Sdt}$$

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{S}} = \mu dt$$

と置くことが出来る。

これを時点 0 から T まで積分すると

$$S_T = S_0 e^{\mu T}$$

dz について考えると、

$$\mathrm{dS} = \mu \mathrm{Sdt} + \sigma \mathrm{Sdz}$$

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \ (3)$$

となる。

この研究ではリスク中立世界を過程しているのでμは無リスク金利と等しくなるので式（4）のように表すことが出来る。

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dz \ (4)$$

　また株式過程の離散時間モデルを考える。このモデルは幾何ブラウン運動として知られている。式（5）のように示すことが出来る。εは標準正規分布ϕ~(0,1)に従う変数である。

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \ (5)$$

これを変形する

$$\Delta \mathrm{S} = \mu \mathrm{S}\Delta \mathrm{t} + \sigma \mathrm{S}\varepsilon\sqrt{\Delta t} \ (6)$$

(5)の左辺はΔt でのSの収益率に対する離散近似である。またΔS/Sが平均$\mu\ \Delta$t、標準偏差$\sigma\sqrt{\Delta t}$の正規分布に近似的に従うことを示している。言い換えると（7）ようになる。

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi\left(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\right) \ (7)$$

　対数正規分布で出てくる伊藤過程と伊藤の補題について説明する。伊藤過程とは上記で述べた一般化されたウィナー過程の式（1）の a と b を変数 x と時間 t の関数として表したモデルである。式（8）のように表すことができる。

$$\mathrm{dx} = \mathrm{a(x,t)dt} + \mathrm{b(x,t)dz} \ (8)$$

t から t+Δt の微小時間に変数 x から x+Δx 変化したとすると

$$\Delta \mathrm{x} = \mathrm{a(x,t)}\Delta \mathrm{t} + \mathrm{b(x,t)}\varepsilon\sqrt{\Delta t} \ (9)$$

この時間区間では x のドリフト率、分散率は一定で時点 t の値に等しいと仮定されている。これが伊藤過程である。伊藤の補題は変数 x が伊藤過程に従い(10)を満たすとする。

$$\mathrm{dx} = \mathrm{a(x,t)dt} + \mathrm{b(x,t)dz} \ (10)$$

補題によると G が x と y の関数のとき G は式（11）と表すことができる。

$$\mathrm{dG} = \left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}dx \ (11)$$

したがって G も伊藤過程となり、ドリフト率は下記の通りである。

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

また分散率は下記通りである。

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$$

S と t の関数 G は下記の式(12)を満たしている。

$$\mathrm{dG} = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz \ (12)$$

よって、S と G の不確実性は共に dz に由来する。以上が伊藤の補題である。

上記の伊藤の補題を用いた対数正規性について説明する。微小時間における株価の変化率は正規分布に従うと仮定されている。まず、時間Δt における変化率の平均は μ Δt、変化率の標準偏差は$\sigma\sqrt{\Delta t}$となるので式（13）のように表すことができる。μ は株式の収益率（年率）、σ は株式のボラティリティ（年率）である。

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \ (13)$$

ここでΔS は時間Δt における株価 S の変化、φ(m, v)は平均 m、分散 v の正規分布である。（これは式(7)と等しい。）このモデルでは下記の式が成り立つ。

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right]$$

これを変換すると式(14)のように表すことができる。

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \ (14)$$

以上が対数正規性の式である。