

# オプション価格理論

## 基礎ファイナンス

山崎 輝

法政大学大学院 経営学研究科 講義資料

# 内容

---

1. 1期間2項モデルによる価格評価
2. リスク中立確率
3. ヤフーによるZOZOのTOB

# 1期間2項モデルによる価格評価

---

# オプション価格の決定問題

**問題**：Z社の株式を原資産とするコール・オプションのプレミアム（オプションの価格）はいくらか？

このコールの**オプション満期**は1年後、**行使価格**は95円である。

原資産	Z社の株式
行使価格	$K = 95$ 円
オプション満期	$T = 1$ 年後
現在の株価	$S_0 = 100$ 円
安全資産の利率（預金・借入金利）	$r = 1\%$

# 株価変動の1期間2項モデル

## 株価変動の定式化

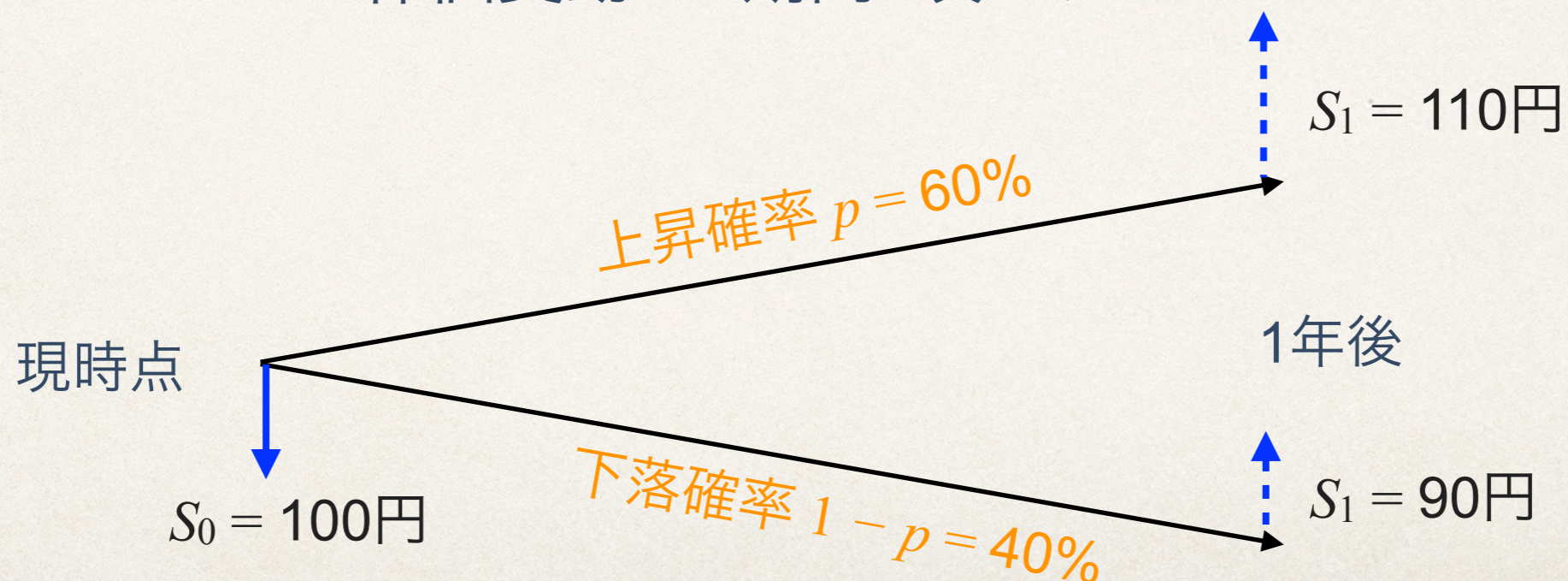
株価上昇

確率  $p = 60\%$  で1年後の株価は  $S_1 = 110$ 円に上昇

株価下落

確率  $1 - p = 40\%$  で1年後の株価は  $S_1 = 90$ 円に下落

## 株価変動の1期間2項モデル



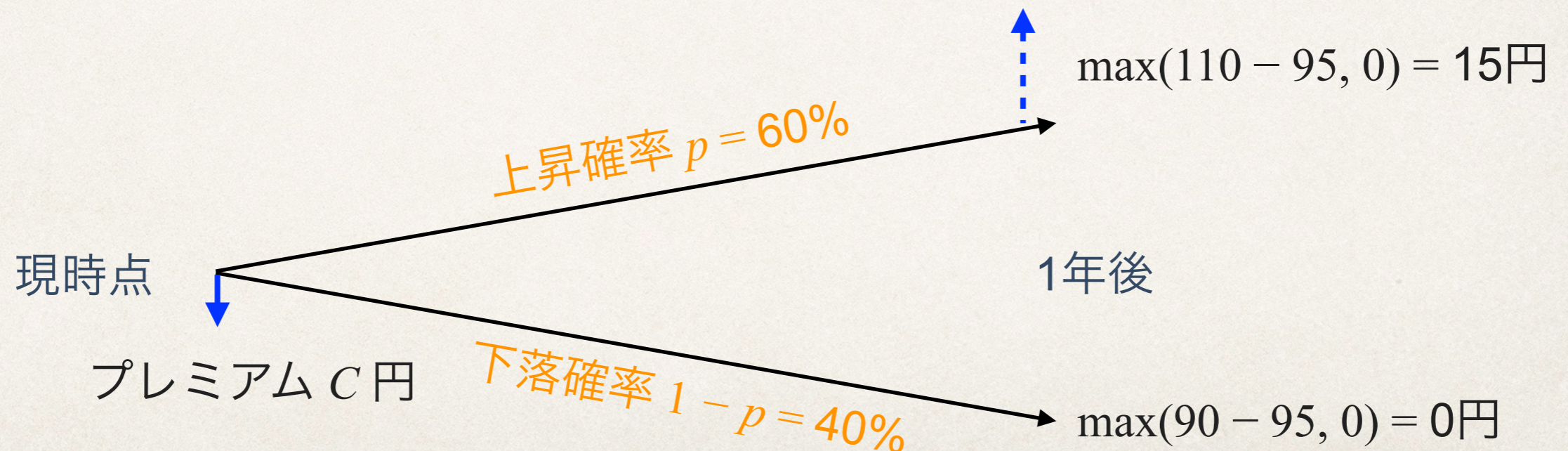
# コールの1期間2項モデル

## コール・ペイオフの定式化

株価上昇 確率  $p = 60\%$  で1年後のペイオフは  $\max(110 - 95, 0) = 15$ 円

株価下落 確率  $1 - p = 40\%$  で1年後のペイオフは  $\max(90 - 95, 0) = 0$ 円

## コール・ペイオフの1期間2項モデル



# 複製ポートフォリオ

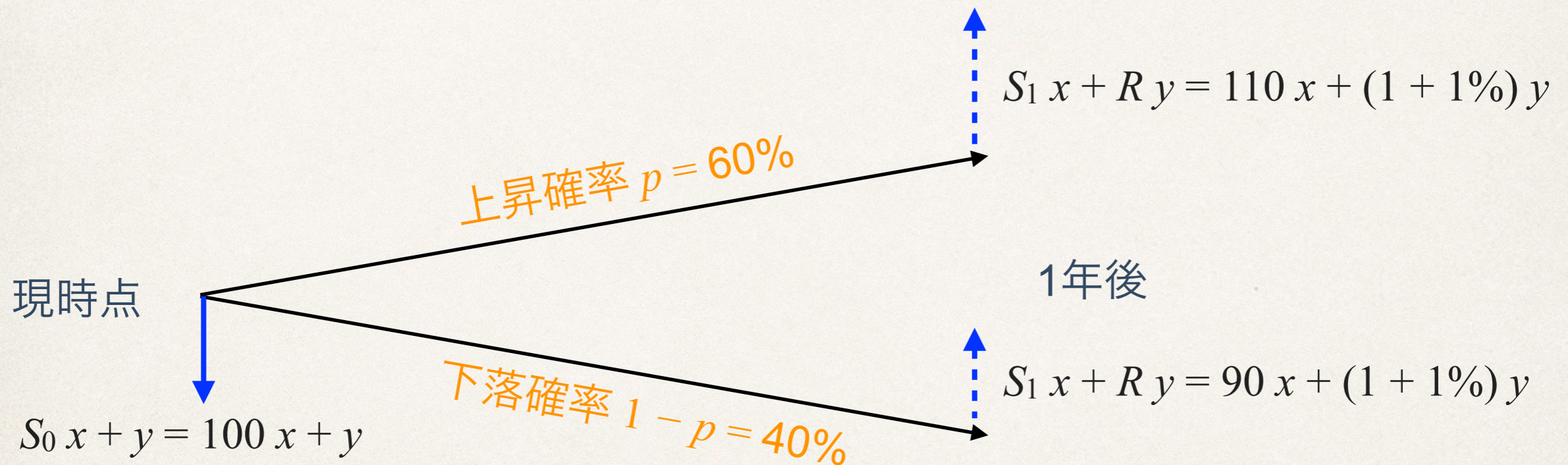
**複製ポートフォリオ** (replication portfolio) Z社の株式の購入 or 空売りと、預金 or 借入の組み合わせ (ポートフォリオ) でコールのペイオフを複製できないか？

株式の購入 / 空売りの株数を  $x$ 、預金 / 借入の金額を  $y$  とする。

	現時点	1年後
Z社の株式価値	$S_0 x$	$S_1 x$
安全資産の価値	$y$	$(1 + r) y = R y$
複製ポートフォリオの価値	$S_0 x + y$	$S_1 x + R y$

# ポートフォリオの1期間2項モデル

## 複製ポートフォリオの1期間2項モデル





# 複製ポートフォリオの導出

**株式と安全資産の保有量は？**：1年後の株式と安全資産のポートフォリオの価値とコールのペイオフを等しくするには、次の連立方程式を解けばよい

$$\begin{cases} 110x + 1.01y = \max(110 - 95, 0) = 15 & \text{(株価上昇時)} \\ 90x + 1.01y = \max(90 - 95, 0) = 0 & \text{(株価下落時)} \end{cases}$$

**解**：  $x = 0.75$ ,  $y = -66.83$

**解釈**：現時点でZ社の株式を**0.75株**購入し、**66.83円**を借入すれば、1年後にコールのペイオフが**複製**できる。

# コール・オプションの価格

**無裁定条件 ③**：いかなる市場環境下でも、2つの投資戦略の結果（ペイオフ）が同じになるならば、これらの初期投資コストは等しくなければならない

➔ **コールのプレミアムは複製ポートフォリオの初期投資コストに等しい**

$$\text{プレミアム } C = S_0 x + y = 100 \times 0.75 + (-66.83) = 8.17 \text{円}$$

**残った疑問：**

- オプション・プレミアムの計算に株価の上昇確率  $p = 60\%$ 、下落確率  $1 - p = 40\%$ が出てこなかったが、これでよいのか？
- コールのペイオフは試行の結果とみなすことができるが、プレミアムの算出に期待値などの確率論の概念を使わなかったが、これでよいのか？

# 問題の一般化

**問題**：ある株式を原資産とするコール・オプションのプレミアム（オプションの価格）はいくらか？

このコールの**オプション満期**は  $T$  年後、**行使価格**は  $K$  とする。

原資産の株価	現時点： $S_0$	満期時点： $S_T$ (確率変数)
行使価格	$K$	
オプション満期	$T$ 年後 (1年以下)	
安全資産の利率	$r$	

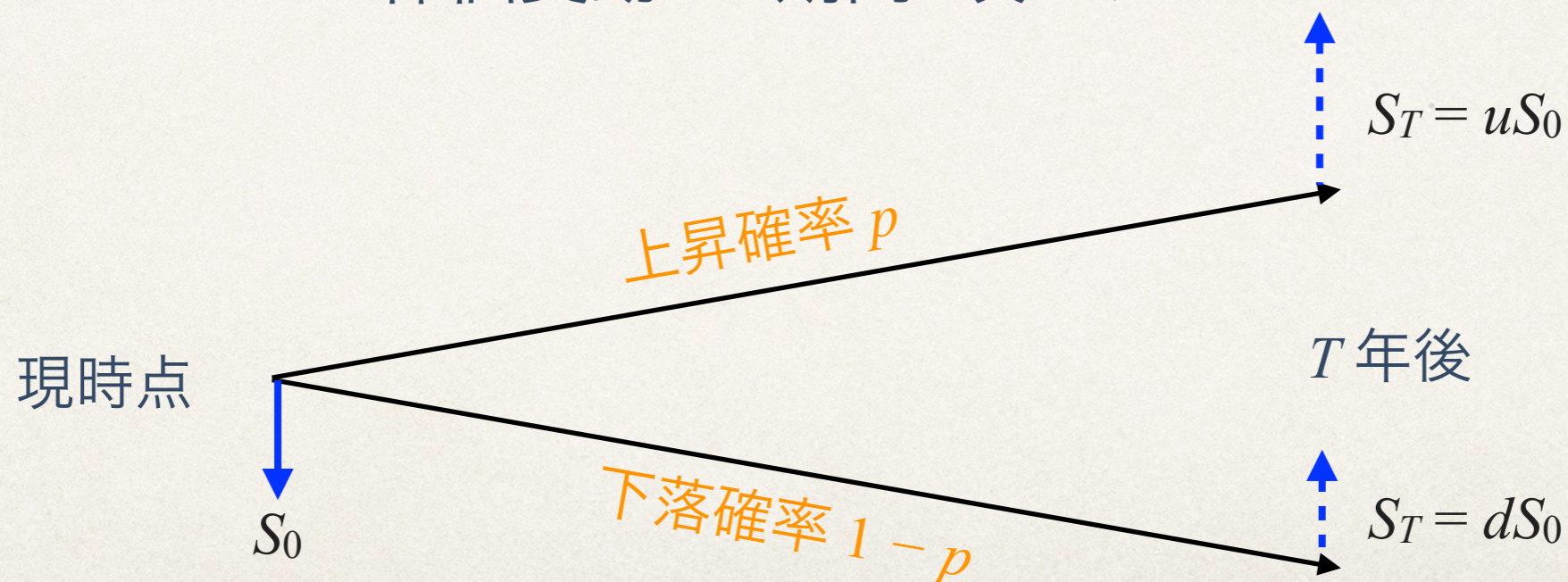
# 1期間2項モデルの一般化 (1)

## 株価変動の定式化

株価上昇 確率  $p$  で  $T$  年後の株価は  $S_T = uS_0$  に上昇 (株価は  $u$  倍に)

株価下落 確率  $1 - p$  で  $T$  年後の株価は  $S_T = dS_0$  に下落 (株価は  $d$  倍に)

## 株価変動の1期間2項モデル



# 1期間2項モデルの一般化 (2)

## 安全資産（預金）の定式化

株価上昇

株価下落

1円の預金の  $T$  年後の価値は  $R := 1 + rT$

## 安全資産のモデル



**無裁定条件：**  $d < R < u$

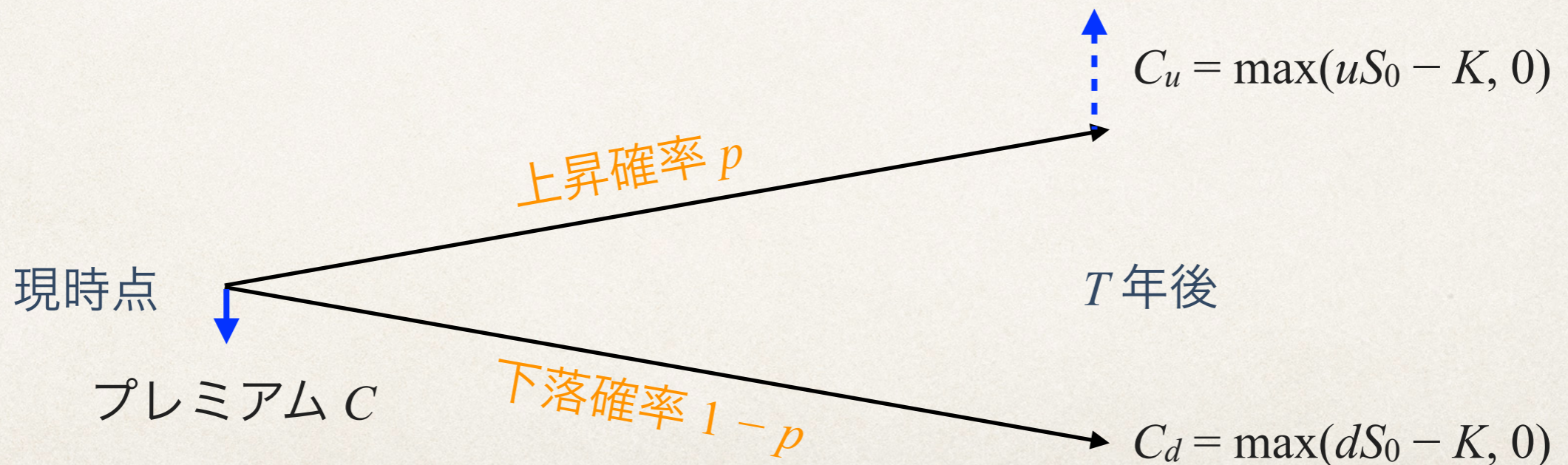
# 1期間2項モデルの一般化 (3)

## コール・ペイオフの定式化

株価上昇 確率  $p$  で  $T$  年後のペイオフは  $C_u := \max(uS_0 - K, 0)$

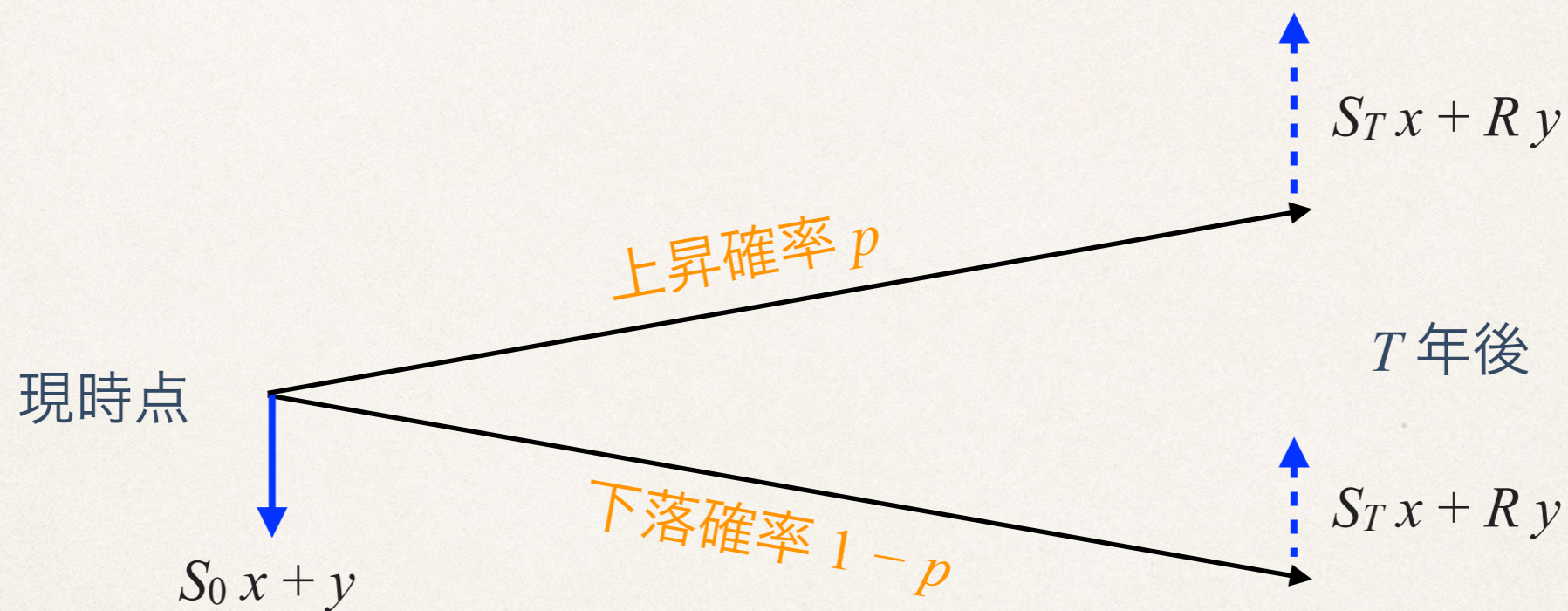
株価下落 確率  $1 - p$  で  $T$  年後のペイオフは  $C_d := \max(dS_0 - K, 0)$

## コール・ペイオフの1期間2項モデル



# 1期間2項モデルの一般化 (4)

複製ポートフォリオの1期間2項モデル



# 複製ポートフォリオの導出

**株式と安全資産の保有量**： $T$ 年後の株式と安全資産のポートフォリオの価値とコールのペイオフを等しくするには、次の連立方程式を解けばよい

$$\begin{cases} uS_0x + Ry = \max(uS_0 - K, 0) = C_u & (\text{株価上昇時}) \\ dS_0x + Ry = \max(dS_0 - K, 0) = C_d & (\text{株価下落時}) \end{cases}$$

**解**：  $x = \frac{C_u - C_d}{S_0(u - d)}, \quad y = \frac{uC_d - dC_u}{R(u - d)}$

**解釈**：現時点で株式を  $\frac{C_u - C_d}{S_0(u - d)}$  株購入し、 $\frac{uC_d - dC_u}{R(u - d)}$  円を預金（符号がマイナス

であれば借入）すれば、 $T$ 年後にコールのペイオフが**複製**できる。



# コール・オプションの価格公式

**無裁定条件 ③**：いかなる市場環境下でも、2つの投資戦略の結果（ペイオフ）が同じになるならば、これらの初期投資コストは等しくなければならない

→ **コールのプレミアムは複製ポートフォリオの初期投資コストに等しい**

**1期間2項モデルによるコール・オプションの価格公式：**

$$\text{コールのプレミアム} \quad C = S_0x + y = \frac{(R - d)C_u + (u - R)C_d}{R(u - d)}$$

# 例題

## 例題：

株式を原資産とする次のコール・オプションを1期間2項モデルで考える。

- 株価は現在100円、1年後に確率50%で150円に上昇、確率50%で50円に下落
- オプション満期は1年後、行使価格は110円
- 安全資産の利率は5%

このとき以下の問に答えよ。

- ① このコールのペイオフを複製するための株式と預金の保有量  $x$  と  $y$  (複製ポートフォリオ) を求めよ。
- ② 求めた保有量  $x$  と  $y$  を利用して、コールのプレミアムを求めよ。

# リスク中立確率

---

# リスク中立確率

コールの価格公式を変形すると...

$$C = \frac{(R - d)C_u + (u - R)C_d}{R(u - d)} = \frac{1}{R} \left\{ \frac{R - d}{u - d} C_u + \frac{u - R}{u - d} C_d \right\}$$

上式の赤字部分を

$$q := \frac{R - d}{u - d} \qquad \hat{q} := \frac{u - R}{u - d}$$

と置くと、 $q + \hat{q} = 1$  かつ  $0 < q, \hat{q} < 1$  なので、これらは確率とみなせる

**リスク中立確率によるコール・オプションの価格公式：**

$$\text{コールのプレミアム} \quad C = \frac{1}{R}(qC_u + \hat{q}C_d) = \frac{\mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)]}{(1 + rT)}$$

ただし、 $\mathbb{E}$  はリスク中立確率  $q$  と  $\hat{q}$  で計算した期待値

# リスク中立確率の意味

リスク中立確率は...

$$q := \frac{R - d}{u - d} \quad (\text{株価上昇確率}) \qquad \hat{q} := \frac{u - R}{u - d} \quad (\text{株価下落確率})$$

リスク中立確率で  $T$  年後の株価の期待値を計算すると...

$$\mathbb{E}[S_T] = q \times uS_0 + \hat{q} \times dS_0 = \frac{R - d}{u - d} \times uS_0 + \frac{u - R}{u - d} \times dS_0 = RS_0$$

## リスク中立確率の意味：

現時点で  $S_0$  円で1株購入しても、 $S_0$  円を預金しても、 $T$  年後の運用結果の期待値はともに  $RS_0$  円で同じ

※ 現実の市場では、通常、株式投資はリスクがあるので、預金よりも運用結果の期待値は高い

# 例題

---

## 例題：

株式を原資産とする次のコール・オプションを1期間2項モデルで考える。

- 株価は現在100円、1年後に確率50%で150円に上昇、確率50%で50円に下落
- オプション満期は1年後、行使価格は110円
- 安全資産の利率は5%

このとき以下の問に答えよ。

- ① この1期間2項モデルにおけるリスク中立確率  $q$  と  $\hat{q}$  を求めよ。
- ② リスク中立確率  $q$  と  $\hat{q}$  を利用して、コールのプレミアムを求めよ。

# ヤフーによるZOZOのTOB

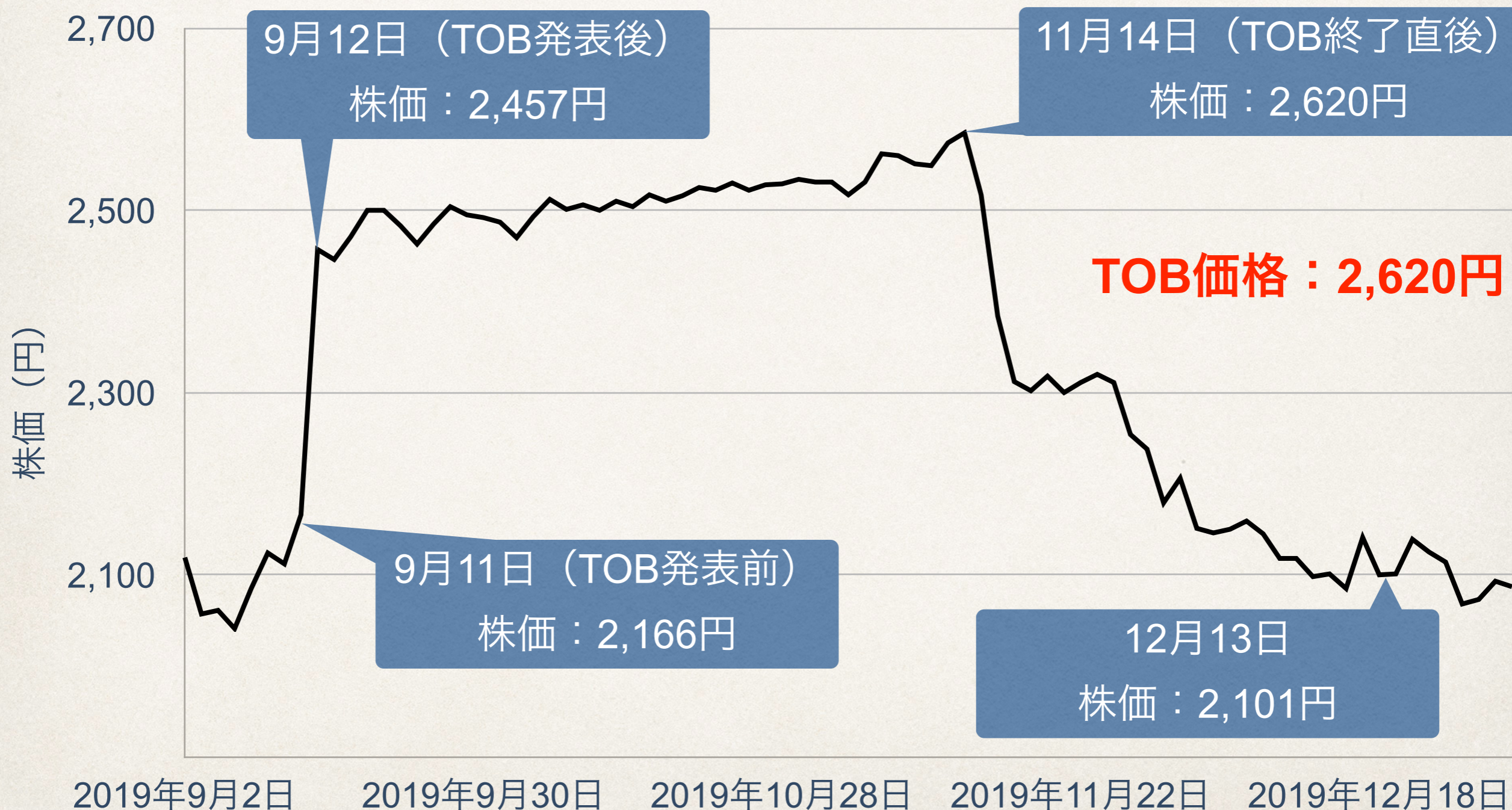
---

# 経緯

2019年9月12日	Zホールディングス株式会社（ヤフー）が株式会社ZOZOの株式公開買付（ <b>TOB</b> , Take Over Bid）を発表  買付価格は1株あたり <b>2,620円</b> （ <b>TOB価格</b> ）
同年9月30日	ヤフーがZOZOの株式公開買付を開始
同年11月13日	株式公開買付終了 ヤフーはZOZO株の応募が予定株式数（全体の50.1%）を大幅に上回ったと発表



# ZOZOの株価推移



# TOB最終日の株主の投資行動

11月13日（TOB最終日）

ケース1：ZOZOの**本源的**株価が2,620円を上回った場合

株主  
売却せず

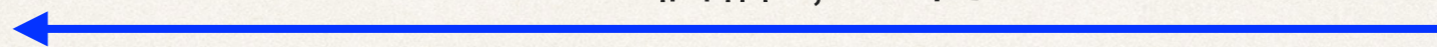
ZOZOの株式（株価2,700円）

ヤフー

ケース2：ZOZOの**本源的**株価が2,620円を下回った場合

株主  
売却

TOB価格2,620円



ZOZOの株式（株価2,200円）



ヤフー

# 無料のプット・オプション

ZOZOの株主にとって、TOB発表は2ヶ月後にZOZOの株式を1株2,620円で売る権利（**プット・オプション**）をヤフーから無料で貰ったことに等しい

取引の主体	株主	ヤフー
原資産	ZOZOの株式	
取引内容	プット（売る権利）の受領	プット（売る権利）の付与
行使価格	1株2,620円	
オプション満期	2ヶ月後（9月12日から11月13日）	

# ZOZO株価急騰の要因

(TOB発表前後のZOZO株価)

- ▶ TOB発表前：株価 = 2,166円
- ▶ TOB発表後：発表前の株価 +  $\text{プット} \cdot \text{プレミアム} \div 2 = 2,457\text{円}$

(予想)

TOB発表後のZOZOの株価は、無料で付与されたプット・オプションのプレミアムの半額分だけ上昇したのではないか？

→ 1期間2項モデルでプットのプレミアムを計算してみよう！

# ZOZOのプット価格は？

**問題：** ZOZOの株式を原資産とするプット・オプションのプレミアム、すなわち、オプションの価格はいくらか？  
このプットの**オプション満期**は2ヶ月後、**行使価格**は2,620円である。

現在の株価	$S_0 = 2,166$ 円
行使価格	$K = 2,620$ 円
オプション満期	$T = 2$ ヶ月後 (1/6年後)
株価変動率	$u = 1.286$ 倍、 $d = 0.777$ 倍
安全資産の利率 (預金・借入金利)	$r = 0.05\%$

# コール・プレミアムの計算 (1)

まずは次の手順で2020株のコールのプレミアムを計算しよう！

手順1：コールのペイオフを求める

$$\text{(株価上昇時)} \quad C_u = \max(uS_0 - K, 0) = \max(1.286 \times 2166 - 2620, 0) = 166.08$$

$$\text{(株価下落時)} \quad C_d = \max(dS_0 - K, 0) = \max(0.777 \times 2166 - 2620, 0) = 0$$

手順2：2ヶ月後の預金の将来価値を求める

$$R = 1 + rT = 1 + 0.0005 \times \frac{1}{6} = 1.0001$$

# コール・プレミアムの計算 (2)

手順3: リスク中立確率を求める

$$\text{(上昇確率)} \quad q = \frac{R - d}{u - d} = \frac{1.0001 - 0.777}{1.286 - 0.777} = 0.4376$$

$$\text{(下落確率)} \quad \hat{q} = 1 - q = 1 - 0.4376 = 0.5624$$

したがって、コール・プレミアムは、

$$C = \frac{1}{R}(qC_u + \hat{q}C_d) = 72.66 \text{ 円}$$

# ZOZOの理論株価の計算

次にプット・コール・パリティ

$$C - P = S_0 - \frac{K}{(1 + rT)}$$

を使って、プットのプレミアムを計算すると…

$$P = C - S_0 + \frac{K}{R} = 72.66 - 2166 + \frac{2620}{1.0001} = 526.45$$

したがって、TOB発表後のZOZOの理論株価は、

$$S_0 + \frac{1}{2}P = 2166 + \frac{1}{2} \times 526.45 = 2,429 \text{ 円}$$