債券と金利の関係

基礎ファイナンス

山嵜　輝

法政大学大学院 経営学研究科 講義資料

内容

1. 準備
2. 債券投資の収益率
3. スポットレート
4. フォワードレート
5. 中央銀行の金融政策を占う

準備

債券とは？

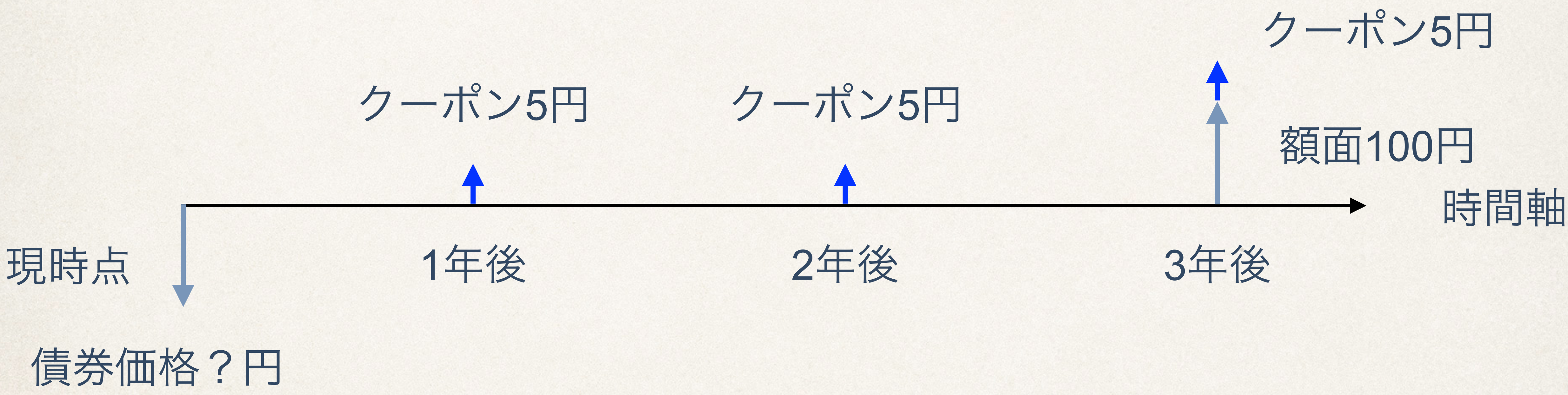
債券（bond）とは、発行体が負債として資金調達するために発行する有価証券であり、あらかじめ定められた方法で元本と利息を支払うことを約束

債券の特徴：

- 債券の元本を額面、利息をクーポンという
- 通常、債券の額面は100円
- 債券は市場価格で発行され、満期で額面金額が償還される
- 債券は流通市場において市場価格で売買される

固定利付債（fixed rate bond）

固定利付債のキャッシュフロー（クーポンレート5%、満期3年）



債券価格の計算

問題： 満期3年、クーポンレート5%、額面100円の固定利付債の価格を求めよ。ただし、利率8%の安全資産（1年複利）で運用可能であるとする。

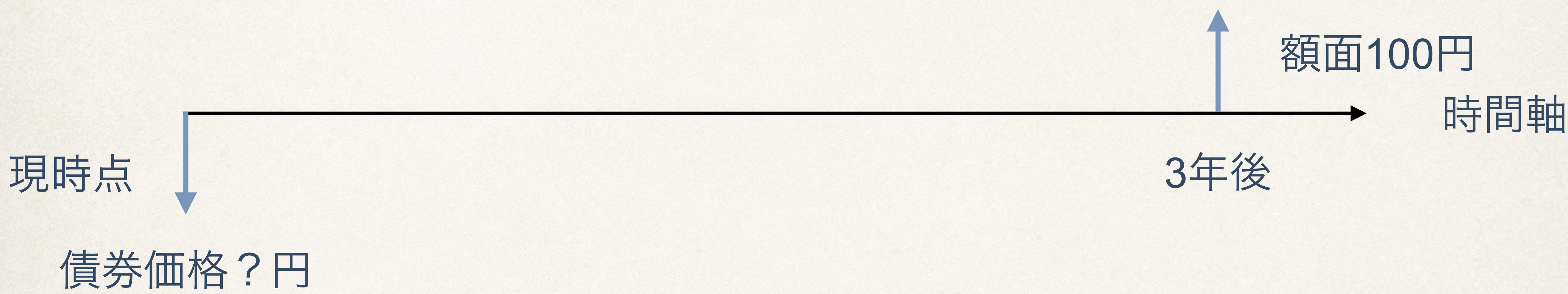
復習：

- 現在価値の公式 $\mathrm{PV} = \dfrac{n\text{年後のCF}}{(1+r)^{n}}$
- 複数のキャッシュフローの現在価値は、それぞれのキャッシュフローの現在価値を求めてから合算すればよい

固定利付債価格 ＝

割引債（discount bond）

割引債のキャッシュフロー（満期3年）



割引債価格 ＝

債券価格の公式？

固定利付債価格：満期 N 年、クーポンレート c %の固定利付債の価格 P は

$$P = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^{N-1}} + \frac{C+100}{(1+r)^N}$$

$$= C \times \mathrm{DF}(1) + C \times \mathrm{DF}(2) + \cdots + C \times \mathrm{DF}(N-1) + (C+100)\mathrm{DF}(N)$$

ただし、C（$= c \times 100$）はクーポン

割引債価格：満期 N 年の割引債の価格 P は

$$P = \frac{100}{(1+r)^N} = 100 \times \mathrm{DF}(N)$$

債券投資の収益率

債券投資の収益の源泉

キャピタル・ゲイン／ロス（capital gain/loss）：

- 満期まで保有した場合 → 償還差損益
- 期中で売却した場合 → 売買損益

インカム・ゲイン（income gain）：

- クーポン収入（利付債のみ）

債券投資の収益の程度（どれだけ儲かった／損した）を測るために、
利回りとよばれる投資収益率の指標が用いられている

直接利回り

クーポンレート c %の固定利付債の**直接利回り**（直利）は次式で計算される

$$\text{直接利回り} = \frac{\text{1年間のクーポン収入}}{\text{債券価格}} = \frac{C}{P}$$

ただし、P は債券価格、C（$= c \times 100$）はクーポン

例題：満期3年、クーポンレート8%、額面100円の固定利付債を105円で購入したときの直接利回りを求めよ。

単利最終利回り

満期 N 年、クーポンレート c %の固定利付債の**単利最終利回り**は次式で計算される

$$\text{単利最終利回り} = \frac{C + \dfrac{100 - P}{N}}{P}$$

ただし、P は債券価格、C（$= c \times 100$）はクーポン

例題：満期3年、クーポンレート8%、額面100円の固定利付債を105円で購入したときの単利最終利回りを求めよ。

複利最終利回り

満期 N 年、クーポンレート c %の固定利付債の**複利最終利回り**とは、次式を満たす y である

$$P = \frac{C}{(1+y)} + \frac{C}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+y)^{N-1}} + \frac{C+100}{(1+y)^N}$$

ただし、P は債券価格、C（$= c \times 100$）はクーポン

例題：満期2年、クーポンレート5%、額面100円の固定利付債を98円で購入したときの複利最終利回りを求めよ。

所有期間利回り

満期 N 年、クーポンレート c %の固定利付債を購入時から M 年後に売却したときの**所有期間利回り**とは、次式を満たす y である

$$P = \frac{C}{(1+y)} + \frac{C}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+y)^{M-1}} + \frac{C+S}{(1+y)^M}$$

ただし、$N > M$、P は購入価格、S は売却価格、C（$= c \times 100$）はクーポン

例題：満期2年、クーポンレート2%、額面100円の固定利付債を99.04円で購入し、1年後に100.49円で売却したときの所有期間利回りを求めよ。

スポットレート

完全・完備な債券市場

以降では、次の仮定をおく

（仮定）

- 債券市場では、あらゆる満期の割引債が取引されている
- すべての割引債に適切な市場価格が付いている
- 債券は自由に売買できる（空売りや取引単位などの制約なし）
- 債券売買には、取引コストや税金が掛からない

（例）満期1年の割引債価格　99円、満期2年の割引債価格　97.8円、
満期3年の割引債価格　96.5円、満期4年の割引債価格　95円…

割引債の矢印図


額面100円
現時点
1年後
割引債価格 99円
額面100円
2年後
割引債価格 97.8円
額面100円
3年後
割引債価格 96.5円
額面100円
4年後
割引債価格 95円

スポットレートとは？

満期 n 年の割引債の複利最終利回りを n 年の**スポットレート**（spot rate）
もしくは n 年の**ゼロレート**（zero rate）という

すなわち、次式を満たす y である

$$P = \frac{100}{(1+y)^n}$$

ただし、P は割引債価格

表記：n 年のスポットレートを r_n と書くことにする

スポットレートの計算

満期	割引債価格	スポットレート		
1年	99円	$99 = \dfrac{100}{(1+r_1)}$	➡️	$r_1 = \dfrac{100}{99} - 1 = 1.01\,\%$
2年	97.8円	$97.8 = \dfrac{100}{(1+r_2)^2}$	➡️	$r_2 = \sqrt{\dfrac{100}{97.8}} - 1 = 1.12\,\%$
3年	96.5円	$96.5 = \dfrac{100}{(1+r_3)^3}$	➡️	$r_3 = \sqrt[3]{\dfrac{100}{96.5}} - 1 = 1.19\,\%$
4年	95円	$95 = \dfrac{100}{(1+r_4)^4}$	➡️	$r_4 = \sqrt[4]{\dfrac{100}{95}} - 1 = 1.29\,\%$

固定利付債価格の再考

問題：満期3年、クーポンレート2%の固定利付債の価格はいくら？

	価格	1年後のCF	2年後のCF	3年後のCF
固定利付債 （満期3年、クーポン2%）	？円	2円	2円	102円
満期1年の割引債 × 0.02	99円 × 0.02	100円 × 0.02		
満期2年の割引債 × 0.02	97.8円 × 0.02		100円 × 0.02	
満期3年の割引債 × 1.02	96.5円 × 1.02			100円 × 1.02
計	102.37円	2円	2円	102円

固定利付債価格の計算

固定利付債の価格は…

$$
\begin{aligned}
\text{固定利付債価格} &= 99 \times 0.02 + 97.8 \times 0.02 + 96.5 \times 1.02 \\
&= \frac{100}{(1 + r_1)} \times 0.02 + \frac{100}{(1 + r_2)^2} \times 0.02 + \frac{100}{(1 + r_3)^3} \times 1.02 \\
&= \frac{2}{(1 + r_1)} + \frac{2}{(1 + r_2)^2} + \frac{2 + 100}{(1 + r_3)^3} \\
&= 102.37
\end{aligned}
$$

答え．102.37円

固定利付債の価格公式

固定利付債の価格公式：満期 N 年、クーポンレート c %の固定利付債価格 P は次式で与えられる

$$P = \frac{C}{(1+r_1)} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C+100}{(1+r_N)^N}$$

割引因子の再定義：n 年の割引因子を以下で再定義する

$$\mathrm{DF}(n) := \frac{1}{(1+r_n)^n}$$

割引因子を使うと固定利付債価格は次式となる

$$P = C \times \mathrm{DF}(1) + C \times \mathrm{DF}(2) + \cdots + (C+100) \times \mathrm{DF}(N)$$

例題

例題：1年のスポットレートが10%、2年のスポットレートが11%、3年のスポットレートが12%であった。このとき以下の問いに答えよ。

① 1年、2年、3年のそれぞれの割引因子を求めよ

② 満期3年、クーポンレート3%の固定利付債の価格を求めよ

債券価格と金利の関係

固定利付債の価格公式をよくみると…

（重要！）

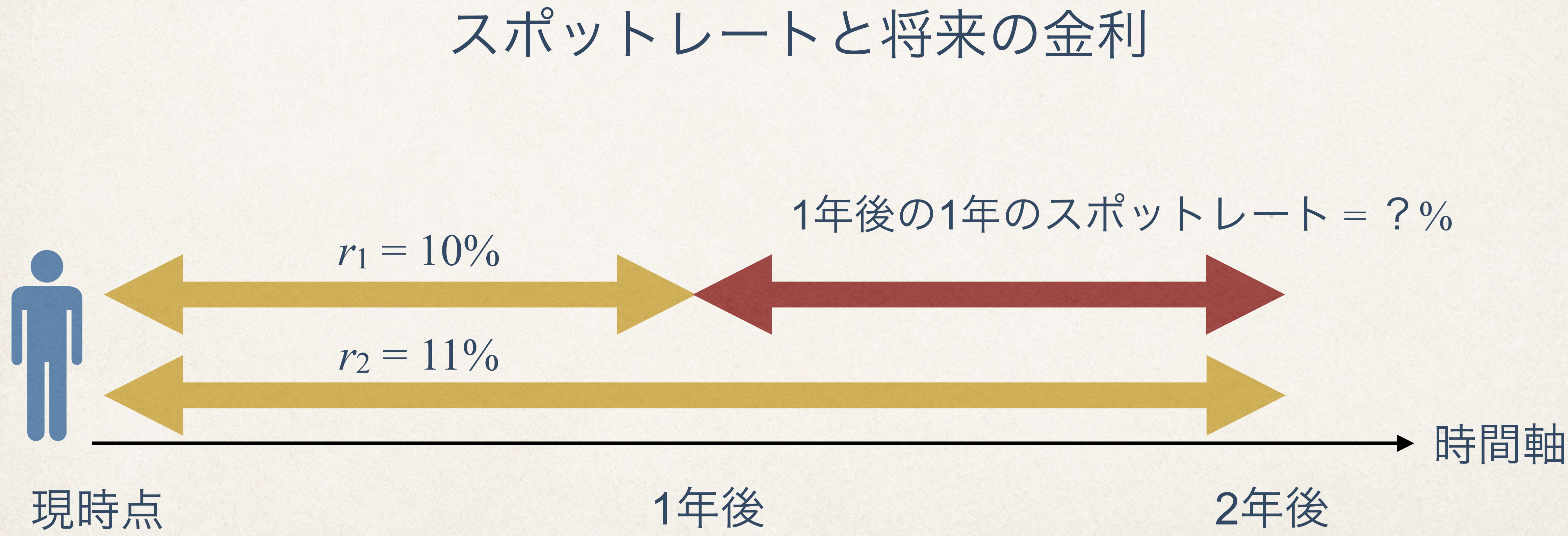
スポットレートが上昇（低下）すると、債券価格は下落（上昇）する

→債券価格と金利は逆の動きをする！

フォワードレート

現時点からみた将来の金利は？

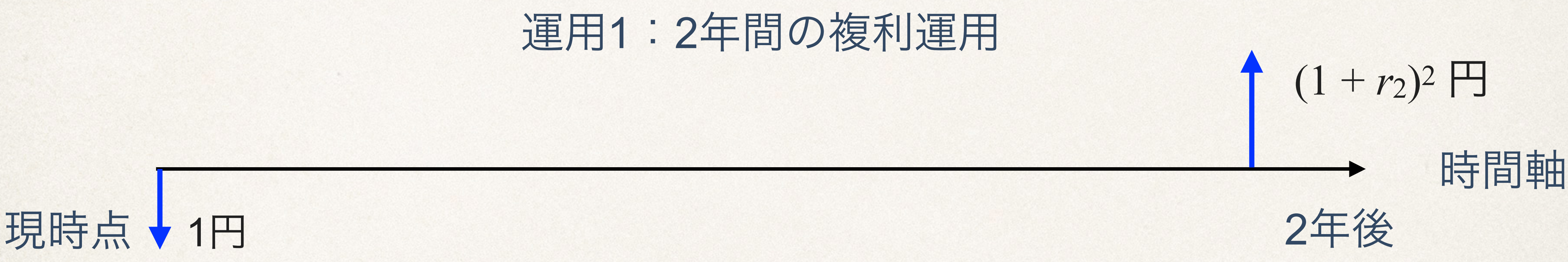
問題：現時点の1年のスポットレートが10%、2年のスポットレートが11%のとき、1年後の1年のスポットレートは何%と考えるのが妥当？

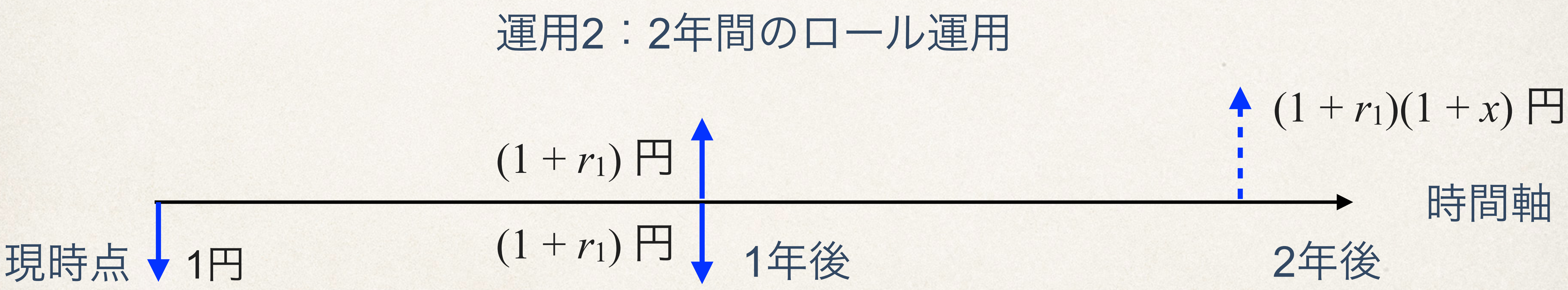


2通りの1円の運用

	取引内容
運用1 （2年間の複利運用）	1円を2年のスポットレート $r_2 = 11\%$ で2年間運用
運用2 （2年間のロール運用）	1円を次の手順で2年間運用 • 前半1年間を1年のスポットレート $r_1 = 10\%$ で運用 • 後半1年間は1年後の1年のスポットレート x で運用 • ただし、1年後の1年のスポットレート x は現時点では未確定であることに注意！

2通りの運用の矢印図


運用1：2年間の複利運用
$(1+r_2)^2$ 円
時間軸
現時点
1円
2年後


運用2：2年間のロール運用
$(1+r_1)(1+x)$ 円
$(1+r_1)$ 円
時間軸
現時点
1円
$(1+r_1)$ 円
1年後
2年後

フォワードレート

2通りの方法で運用したときの1円の2年後の将来価値は…

（運用1）　将来価値 $= (1 + r_2)^2 = (1 + 11\%)^2$

（運用2）　将来価値 $= (1 + r_1)(1 + x) = (1 + 10\%)(1 + x)$

現時点からみたとき、この2つの将来価値は等しくあるべきでは？

$$(1 + r_2)^2 = (1 + r_1)(1 + x) \quad \rightarrow \quad x = \frac{(1 + r_2)^2}{(1 + r_1)} - 1 = \frac{(1 + 11\%)^2}{(1 + 10\%)} - 1 = 12\,\%$$

答え．1年後の1年のフォワードレートは12%

フォワードレートの公式

フォワードレートの公式：n 年後の1年のフォワードレート（foward rate）は次式で与えられる

$$f_n = \frac{(1 + r_{n+1})^{n+1}}{(1 + r_n)^n} - 1$$

割引因子による表現：割引因子を用いると、n 年後の1年のフォワードレートは次式となる

$$f_n = \frac{\mathrm{DF}(n)}{\mathrm{DF}(n+1)} - 1$$

例題

例題：現在の2年のスポットレートが2%、3年のスポットレートが4%のとき、以下の手順で2年後の1年のフォワードレートを求めよ

① 2年の割引因子を求めよ

② 3年の割引因子を求めよ

③ 求めた割引因子を用いて、2年後の1年のフォワードレート f_2 を求めよ

パーレート

- 債券価格が額面100円に等しいとき ➡️ **パー**（par）
- 債券価格が額面100円を上回るとき ➡️ **オーバーパー**（over par）
- 債券価格が額面100円を下回るとき ➡️ **アンダーパー**（under par）

パーレート：固定利付債の価格がちょうど額面100円になるような<u>クーポンレートを</u>**パーレート**（par rate）という

パーレートの公式

パーレートの公式：満期 N 年の固定利付債の価格がちょうど額面100円となるクーポンレート c %、すなわちパーレートは次式となる

$$c = \frac{1 - \mathrm{DF}(N)}{\mathrm{DF}(1) + \mathrm{DF}(2) + \cdots + \mathrm{DF}(N)}$$

証明：

ブートストラップ法とは？

（スポットレートの有用性）

- スポットレートが得られれば、固定利付債価格、フォワードレート、パーレートなどが計算できる
- ところが、実際の金融市場ではスポットレートは直接観測できない
- 実務では、市場で観測される固定利付債価格からスポットレートを推定

（ブートストラップ法）

求めたい値が複数ある状況で、まず1つの値が決まるとその値を利用して2つ目の値が決まり、さらに得られた2つの値を利用して3つ目が決まり、以下同様に順々に値が決まるような計算手順

債券市場の観測値

	満期	クーポンレート	観測価格
固定利付債A	1年	2.0%	99.51円
固定利付債B	2年	3.0%	100.30円
固定利付債C	3年	8.0%	114.14円

ブートストラップ法

満期	固定利付債の価格公式	スポットレート
1年	$99.51 = \dfrac{2 + 100}{(1 + r_1)}$	$r_1 = \dfrac{102}{99.51} - 1 = 2.50\,\%$
2年	$100.30 = \dfrac{3}{(1 + r_1)} + \dfrac{3 + 100}{(1 + r_2)^2}$	$r_2 = \sqrt{\dfrac{103}{100.30 - \frac{3}{1.025}}} - 1 = 2.85\,\%$
3年	?	? %

中央銀行の金融政策を占う

FRBと政策金利

- 米国の中央銀行であるFRB（Federal Reserve Bank、連邦準備理事会）は約6週間に1回開催するFOMC（Federal Open Market Committee、連邦公開市場委員会）で米国の金融政策を決定する
- 金融政策の主な手段は政策金利（Fideral Fund Rate）の引き上げ／引き下げであり、市場参加者はこの行方に非常に注目している
  - ✓ 景気過熱／インフレ懸念あり ➡️ 政策金利の引き上げ
  - ✓ 景気停滞／デフレ懸念あり ➡️ 政策金利の引き下げ
- 政策金利の変更幅は **±0.25%** もしくは **±0.50%**

1ヶ月後の政策金利の変更予想

理屈としては、先渡金利は将来の金利の予測値と解釈できるので、FRBが1ヶ月後のFOMCで何パーセント政策金利を上げるか（利上げ）、下げるのか（利下げ）は次式で予想できるのでは？

1ヶ月後の政策金利の変更幅

＝（1ヶ月後の1ヶ月金利）ー（現在の1ヶ月金利）

米国のLIBORを使って、上式を日々計算してみると…

2018年の政策金利の変更予想

2019年の政策金利の変更予想