

キャッシュフローと現在価値

ファイナンス論 I

山寄 輝

法政大学 経営学部

内容

- 1 基礎概念
- 2 複利運用
- 3 付利期間
- 4 連続複利
- 5 割引因子

基礎概念

- 1 基礎概念
- 2 複利運用
- 3 付利期間
- 4 連続複利
- 5 割引因子

ファイナンス理論のアプローチ

ファイナンス理論でのアプローチ

ファイナンス理論では、**金融取引**を定式化し、**モデル**で表現することで様々な分析をするというアプローチをとる

金融取引 ... 不確実性を伴う異時点間の貨幣の交換

モデルとは？

モデルとは、以下を踏まえた現実の事象の定式化

- **単純化** 重要でない部分を捨象することで論点を明確化
- **抽象化** 汎用性や一般性を高めるための便宜

ファイナンス・モデルにおける単純化と抽象化

● 単純化の例：1ヵ月間を何年と換算するか？

■ 現実には...

1月：31/365、2月：28/365、3月：31/365、4月：30/365...

■ 単純化

1ヵ月間 = $1/12$

● 抽象化の例：企業の株式をどれだけ買えるか？

■ 現実には...

- ▶ **最小購入量** 株式の売買最小単位が決められている
- ▶ **最大購入量** 株式発行総額が上限で、売り手がいないと買えない

■ 抽象化

- ▶ **最小購入量** いくらでも株式が分割可能で無限小単位の株式購入が可能
- ▶ **最大購入量** 有限量の株式がいつでも、いくらでも購入可能

キャッシュフローとは？

定期預金の例

Aさんは定期預金として銀行に100万円預け、1年後に2%の利息と元本100万円を銀行から受取る

- 現時点

- Aさんは100万円支払う（銀行は100万円受取る）

- 満期（1年後）

- Aさんは102万円（元本 + 利息）受取る（銀行は102万円支払う）

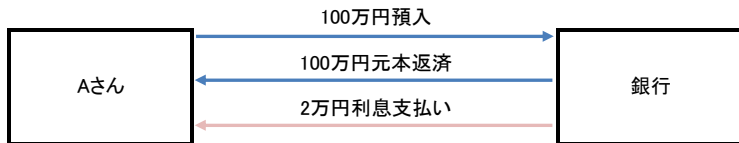
キャッシュフロー

キャッシュフロー（cash flow、CF）とは、時間軸に沿った貨幣の出入りのことであり、以下の4つの構成要素からなる

- ① 主体はだれか？（Aさん or 銀行）
- ② 貨幣が出入りする時点は？（現時点、満期...）
- ③ 貨幣が出るのか、入るのか？（受け取り or 支払い）
- ④ 貨幣の量は？（預金額100万円、元本額100万円、利子2万円）

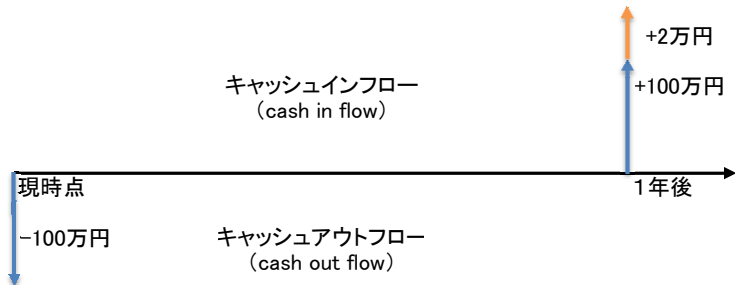
取引関係図

Figure: 定期預金の取引関係図



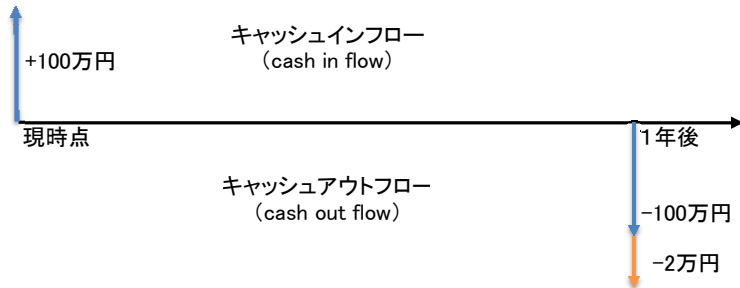
キャッシュフローの矢印図 (1)

Figure: A さんにとっての定期預金の矢印図



キャッシュフローの矢印図 (2)

Figure: 銀行にとっての定期預金の矢印図



将来価値

問題

現在持っている 100 万円の 1 年後（将来）の価値はいくらか？

条件

- 現在、年 1 回払い、年率 2% の定期預金（安全資産）で運用可能

解答

安全資産で運用すると 1 年後は

$$\text{元本} + \text{利息額} = 100 \text{ 万円} + 100 \text{ 万円} \times 2\% = 102 \text{ 万円}$$

100 万円の将来価値（future value、FV）は 102 万円

現在価値（1）

問題

1 年後に貰える 102 万円の現在の価値はいくらか？

条件

- 現在、年 1 回払い、年率 2%の安全資産で運用可能

Figure: 矢印図



現在価値（2）

解答

1 年後の将来価値が 102 万円だから、現在の価値を X とすると以下の方程式が成り立つ

$$\begin{aligned} X(\text{元本}) + X \times 2\%(\text{利息額}) &= 102 \text{ 万円} \\ \Leftrightarrow X &= \frac{102 \text{ 万円}}{1 + 2\%} = \frac{102 \text{ 万円}}{1 + 0.02} = 100 \text{ 万円} \end{aligned}$$

将来価値 102 万円の**現在価値** (present value、PV) は 100 万円

基本公式

$$\begin{aligned} PV &= \frac{FV}{1+r} = \frac{\text{将来の CF}}{1+r} & r: \text{金利} \\ \Leftrightarrow FV &= PV(1+r) \end{aligned}$$

現在価値とは、将来のキャッシュフローを金利で割り引いた値

複利運用

1 基礎概念

2 複利運用

3 付利期間

4 連続複利

5 割引因子

複利とは？

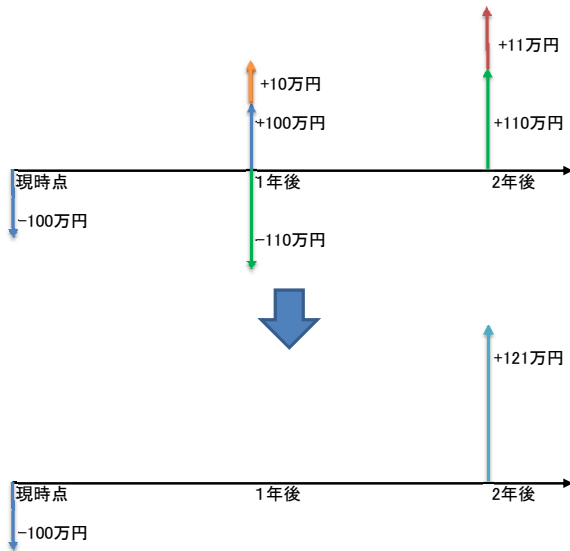
定期預金の例

Aさんは以下の条件の定期預金（安全資産）に 100 万円預けた

- 定期預金の満期は 2 年
- 年率 10%の利息
- 1 年毎に付利され、途中の利息額は元本に加算され同条件で運用

これを 2 年満期、1 年複利の運用という

キャッシュフローの合成



将来価値と現在価値

将来価値

1 年複利運用の 100 万円の 2 年後の将来価値はいくらか？

- 1 年後の将来価値は

$$100 \text{ 万円} + 100 \text{ 万円} \times 10\% = 100 \text{ 万円} \times (1 + 10\%) = 110 \text{ 万円}$$

- 2 年後の将来価値は

$$\begin{aligned} 110 \text{ 万円} + 110 \text{ 万円} \times 10\% &= 110 \text{ 万円} \times (1 + 10\%) \\ &= 100 \text{ 万円} \times (1 + 10\%)^2 = 121 \text{ 万円} \end{aligned}$$

2 年満期、1 年複利の公式

$$FV = PV(1 + r)^2 \iff PV = \frac{FV}{(1 + r)^2} = \frac{\text{将来の CF}}{(1 + r)^2}$$

n 年満期、1 年複利の将来価値と現在価値

将来価値

1 年複利運用の 100 万円の n 年後の将来価値はいくらか？

- 1 年後の将来価値は $100 \text{ 万円} \times (1 + 10\%) = 110 \text{ 万円}$
- 2 年後の将来価値は $100 \text{ 万円} \times (1 + 10\%)^2 = 121 \text{ 万円}$
- 3 年後の将来価値は $100 \text{ 万円} \times (1 + 10\%)^3 = 133.1 \text{ 万円}$
-
- n 年後の将来価値は $100 \text{ 万円} \times (1 + 10\%)^n$

n 年満期、1 年複利の公式

$$FV = PV(1 + r)^n \iff PV = \frac{FV}{(1 + r)^n} = \frac{\text{将来の CF}}{(1 + r)^n}$$

例題

3 年満期、1 年複利の運用

3 年満期、1 年複利、年率 3% の安全資産で運用できるとき、以下の問いに答えよ。

- 1 100 万円運用するときのキャッシュフローの矢印図を描け
- 2 現在の 100 万円の 3 年後の将来価値を求めよ
- 3 3 年後の将来価値（キャッシュフロー）100 万円の現在価値を求めよ

付利期間

1 基礎概念

2 複利運用

3 付利期間

4 連続複利

5 割引因子

付利期間とは？

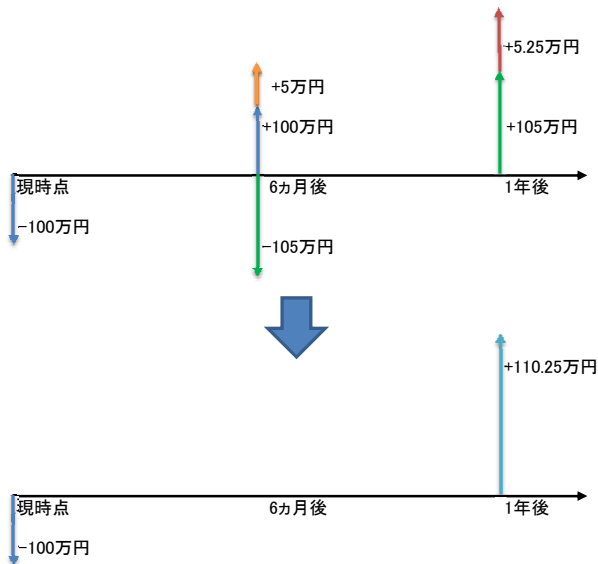
定期預金の例

Aさんは以下の条件の定期預金（安全資産）に 100 万円預けた

- 定期預金の満期は 1 年
- 年率 10%の利息
- 半年毎に付利され、途中の利息額は元本に加算され同条件で運用

これを 1 年満期、半年複利の運用という

キャッシュフローの合成



半年複利の将来価値

将来価値

半年複利運用の 100 万円の 1 年後の将来価値はいくらか？

- 6ヶ月後の将来価値は

$$100 \text{ 万円} + 100 \text{ 万円} \times \frac{10\%}{2} = 100 \text{ 万円} \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right) = 105 \text{ 万円}$$

- 1 年後の将来価値は

$$\begin{aligned} 105 \text{ 万円} + 105 \text{ 万円} \times \frac{10\%}{2} &= 105 \text{ 万円} \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right) \\ &= 100 \text{ 万円} \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^2 = 110.25 \text{ 万円} \end{aligned}$$

1 年満期、 $1/m$ 年複利の将来価値と現在価値

将来価値

$1/m$ 年複利運用の 100 万円の 1 年後の将来価値はいくらか？

- $1/m$ 年後の将来価値は 100 万円 $\times (1 + \frac{10\%}{m})$
- $2/m$ 年後の将来価値は 100 万円 $\times (1 + \frac{10\%}{m})^2$
- $3/m$ 年後の将来価値は 100 万円 $\times (1 + \frac{10\%}{m})^3$
-
- $1 (= m/m)$ 年後の将来価値は 100 万円 $\times (1 + \frac{10\%}{m})^m$

1 年満期、 $1/m$ 年複利の公式

$$FV = PV \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \iff PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m} = \frac{\text{将来の CF}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m}$$

例題

1 年満期、3ヵ月複利の運用

1 年満期、3ヵ月複利、年率 4% の安全資産で運用できるとき、以下の問いに答えよ。

- 1 100 万円運用するときのキャッシュフローの矢印図を描け
- 2 現在の 100 万円の 1 年後の将来価値を求めよ
- 3 1 年後の将来価値（キャッシュフロー）100 万円の現在価値を求めよ

3年満期、半年複利

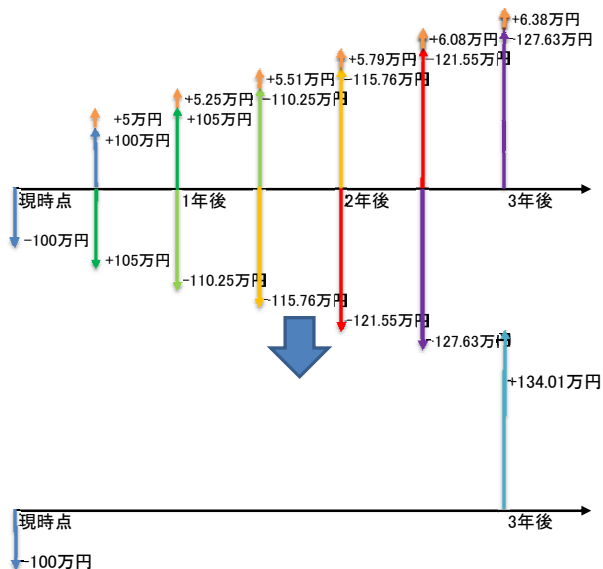
定期預金の例

Aさんは以下の条件の定期預金（安全資産）に100万円預けた

- 定期預金の満期は3年
- 年率10%の利息
- 半年毎に付利され、途中の利息額は元本に加算され同条件で運用

これは **3年満期、半年複利の運用**である

キャッシュフローの合成



3 年満期、半年複利の将来価値

将来価値

半年複利運用の 100 万円の 3 年後の将来価値はいくらか？

- 半年後の将来価値は $100 \text{ 万円} \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right) = 100 \text{ 万円} \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^{2 \times 0.5}$
- 1 年後の将来価値は $100 \text{ 万円} \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^2 = 100 \text{ 万円} \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^{2 \times 1}$
- 1.5 年後の将来価値は $100 \text{ 万円} \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^3 = 100 \text{ 万円} \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^{2 \times 1.5}$
-
- 3 年後の将来価値は $100 \text{ 万円} \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^6 = 100 \text{ 万円} \times \left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^{2 \times 3}$

n 年満期、 $1/m$ 年複利の公式

$$FV = PV \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n} \iff PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n}} = \frac{\text{将来の CF}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n}}$$

例題

2 年満期、3 ヶ月複利の運用

2 年満期、3 ヶ月複利、年率 4% の安全資産で運用できるとき、以下の問いに答えよ。

- 1 100 万円運用するときのキャッシュフローの矢印図を描け
- 2 現在の 100 万円の 2 年後の将来価値を求めよ
- 3 2 年後の将来価値（キャッシュフロー）100 万円の現在価値を求めよ

連續複利

- 1 基礎概念
- 2 複利運用
- 3 付利期間
- 4 連續複利**
- 5 割引因子

付利期間を微小にしたら？

疑問

1 年満期の付利期間を 1 年、半年、3ヵ月、1ヵ月、1 週間、1 日、1 時間、1 分、1 秒... と短くしたら、その将来価値はどうなるか？

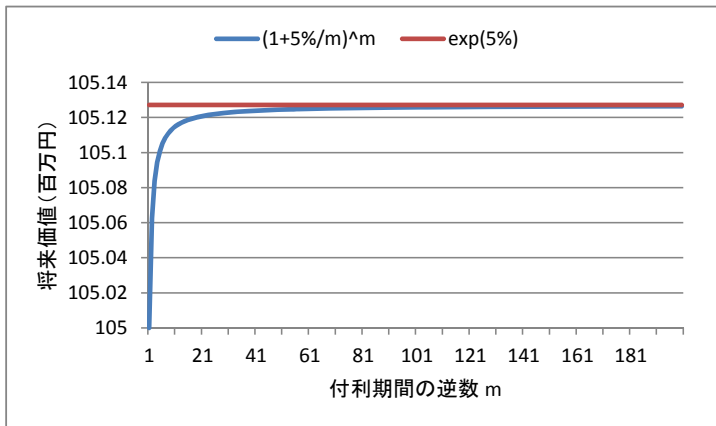
〈再掲〉 1 年満期、 $1/m$ 年複利の公式

$$FV = PV \left(1 + \frac{r}{m} \right)^m \iff PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{r}{m} \right)^m} = \frac{\text{将来の CF}}{\left(1 + \frac{r}{m} \right)^m}$$

付利期間は $1/m$ なので、付利期間を小さくする = m を大きくする

微小付利期間の将来価値

Figure: 1 年満期、 $1/m$ 年複利、年率利息 $r = 5\%$ の 100 万円運用



ネイピア数と連続複利

ネイピア数

ネイピア数 e は次で定義される値である。

$$e = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = 2.71828182845905 \dots$$

- 満期 1 年、付利期間微小 ($m \rightarrow +\infty$)、年率利息 r の 1 万円の将来価値

$$1 \text{ 万円} \times \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = 1 \text{ 万円} \times \lim_{m/r \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{m/r}\right)^{m/r \times r} = 1 \text{ 万円} e^r$$

- 満期 n 年、付利期間微小 ($m \rightarrow +\infty$)、年率利息 r の 1 万円の将来価値

$$1 \text{ 万円} \times \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n} = 1 \text{ 万円} \times \lim_{m/r \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{m/r}\right)^{m/r \times n} = 1 \text{ 万円} e^{nr}$$

連続時間の将来価値と現在価値

n 年満期、連続複利の公式

$$FV = PV e^{rn} \iff PV = \frac{FV}{e^{rn}} = FV e^{-rn} = \frac{\text{将来の CF}}{e^{rn}} = \text{将来の CF} e^{-rn}$$

連続複利を考える利点は？

- 付利期間を考慮する必要がなくなる
- 数式（モデル）の表記がシンプルになる
- 数学（特に微分・積分）の扱いがとても便利

ファイナンス理論では、時間間隔を抽象化して連続時間（continuous time）で分析することが多く、その場合には連続複利が非常によく登場する

割引因子

- 1 基礎概念
- 2 複利運用
- 3 付利期間
- 4 連続複利
- 5 割引因子**

将来キャッシュフローの価格比較

問題

(1) 2年後にもらえる 100 円と (2) 1 年後にもらえる 98 円では、どちらの現在価値（価格、price）が高いか？

- ① 半年複利、年率 1% で運用が可能なとき
- ② 半年複利、年率 3% で運用が可能なとき



現在価値と金利

〈再掲〉 n 年満期、 $1/m$ 年複利の公式

$$PV = \frac{\text{将来の } CF}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n}}$$

① 半年複利、年率 1% で運用が可能なとき

$$\frac{100 \text{ 円}}{\left(1 + \frac{1\%}{2}\right)^{2 \times 2}} \approx 98.02 \text{ 円} \quad > \quad \frac{98 \text{ 円}}{\left(1 + \frac{1\%}{2}\right)^{2 \times 1}} \approx 97.03 \text{ 円}$$

② 半年複利、年率 3% で運用が可能なとき

$$\frac{100 \text{ 円}}{\left(1 + \frac{3\%}{2}\right)^{2 \times 2}} \approx 94.22 \text{ 円} \quad < \quad \frac{98 \text{ 円}}{\left(1 + \frac{3\%}{2}\right)^{2 \times 1}} \approx 95.12 \text{ 円}$$

割引因子

n 年満期、 $1/m$ 年複利の割引因子

$$PV = \frac{\text{将来の } CF}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n}} = \text{将来の } CF \times DF(n; r, m)$$

$$\text{ただし} \quad DF(n; r, m) := \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n}}$$

$DF(n; r, m)$ を n 年の割引因子 (discount factor、DF) という

- 1 年複利の割引因子は

$$DF(n; r, 1) = \frac{1}{(1 + r)^n}$$

- 連続複利の割引因子は

$$DF(n; r, +\infty) = e^{-rn}$$

割引因子の役割と性質

割引因子の役割

- 将来のキャッシュフローに DF を掛けることで現在価値が求まる
- DF を掛けて、現在時点の価値を求めることでキャッシュフローを比較し、加減演算ができるようになる
- DF は異時点のキャッシュフローの価値を調整する調整係数

現在価値の公式

$$PV = \text{将来の } CF \times DF(n; r, m)$$

割引因子の性質

$$0 < DF(n; r, m) \leq 1, \quad DF(n; r = 0, m) = 1, \quad DF(n = 0; r, m) = 1$$

- 金利が高く（低く）なると、割引因子は小さく（大きく）なる
- 満期が長く（短く）なると、割引因子は小さく（大きく）なる

例題

割引因子と現在価値

半年複利、年率 4%の金利があるとき、以下の問いに答えよ。

- 1 年後に 50 万円、2 年後に 100 万円もらえる矢印図を描け
- 1 年の割引因子と 2 年の割引因子を求めよ
- 1 年後の 50 万円の現在価値を求めよ
- 2 年後の 100 万円の現在価値を求めよ
- 現在価値の合計を求めよ